

# 國立武陵高級中學 103 學年度第一學期一年級第一次期中考數學試題

範圍：1-1 ~ 2-2 綜合除法

## 一、 多重選擇題：每題 7 分，共 14 分

(錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 3 分，錯三個選項得 1 分，錯四個選項以上該題不得分)

( ) 1. 設  $a, b, c, d$  為有理數且  $x, y, z$  為實數，則下列敘述何者錯誤：

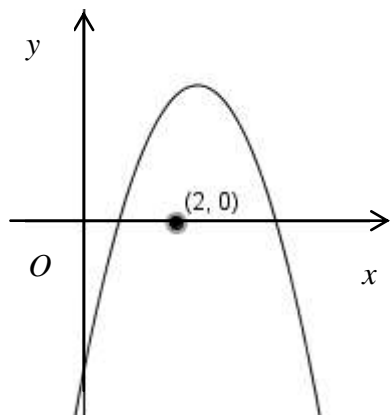
(1) 若  $a+bx=c+dx$ ，則  $a=c$  且  $b=d$       (2) 設  $a, b$  均不為 0，若  $\frac{c}{a}=\frac{c}{b}$ ，則  $a=b$

(3)  $(x+1)^2 > x^2$       (4) 若  $x^2 > y > 0$ ，則  $x > \sqrt{y}$

(5) 若  $x < y < 0$ ，則  $\frac{5}{2x+3y} > \frac{3}{x+2y}$

( ) 2. 若函數  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的圖形如下，則下列各數哪些是負數：

(1)  $a$    (2)  $b$    (3)  $c$    (4)  $b^2 - 4ac$    (5)  $a - b + c$  .



## 二、 填充題：每格 6 分，共 72 分

1. 關於二次函數  $y = -2x^2 + 12x - 7$ ，試求：

(1) 頂點坐標為\_\_\_\_\_

(2) 若將此二次函數圖形沿  $x$  軸向左平移 4 單位，再沿  $y$  軸向下平移 3 單位後，恰與二次函數  $y = ax^2 + bx + c$  的圖形重合，則有序對  $(a, b, c) =$ \_\_\_\_\_

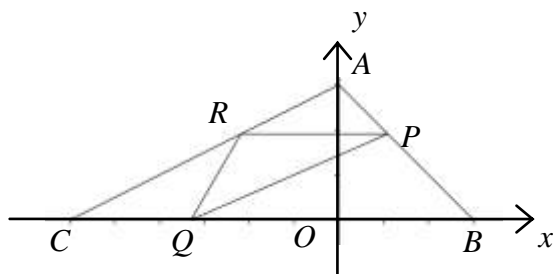
2. 設  $a, p, q, r$  均為實數，若二次函數  $y = px^2 + qx + r$  的圖形與  $x$  軸相交於  $A(a+1, 0)$ ，

$B(a+7, 0)$ ，另與直線  $y = 12$  相交於  $C(a-3, 12)$ ， $D(3a+5, 12)$ ，則  $a$  之值為\_\_\_\_\_

3. 解  $-2x + 1 > 8$  得  $x$  的範圍為\_\_\_\_\_

4.  $A, B, C$  這三個點在數線上之坐標分別為  $-11, 5, x$ ，且  $C$  在  $A, B$  的之間，並滿足  $\overline{AC} : \overline{BC} = 3 : 5$ ，則  $x$  的值為\_\_\_\_\_

5. 設  $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x - 6$ ,  $g(x) = x^2 + x + 2$ , 求  $f(x)$  除以  $g(x)$  的餘式\_\_\_\_\_
6. 已知  $3 \leq x \leq 12$ ,  $-10 \leq y \leq 3$ , 求  $x^2 + y^2$  的範圍為\_\_\_\_\_
7. 如圖, 坐標平面上有三個定點  $A(0, 6)$ ,  $B(6, 0)$ ,  $C(-12, 0)$ , 並分別在  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$  上取  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  三點。試問, 滿足  $\overline{PR} \parallel \overline{BC}$  的  $\triangle PQR$  中, 面積的最大值為\_\_\_\_\_



8. 將多項式  $f(x)$  除以  $x^2 - 2x - 3$  所得的商式為  $x^3 + 7$ , 餘式為  $r(x)$ ; 又  $f(x)$  除以  $r(x)$  的商式為  $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x - 7$ , 餘式為  $h(x)$ , 試問  $r(x) + h(x) =$ \_\_\_\_\_
9. 多項式  $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 11x + 15$

$$= a(x+1)^4 + b(x+1)^3 + c(x+1)^2 + d(x+1) + e$$

求數對  $(a, b, c, d, e) =$ \_\_\_\_\_

10. 設  $a, b, c$  皆為實數且滿足  $|a+1| + 2(b+2)^2 + 3(c^2+2c+2) = 3$ , 若  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , 則  $y = f(x)$  的圖形與  $x$  軸的交點坐標為\_\_\_\_\_

11. 若  $f(x)$  為  $n$  次多項式,  $n \geq 3$ , 且滿足  $f(0) = 1, f(1) = 5, f(2) = 7, f(3) = 15$ , 求  $f(x^2 + 2)$  偶次項係數和 = \_\_\_\_\_.

### 三、 計算證明題：共 14 分 (需寫出計算過程, 違者不計分)

1. 設  $a, b, c$  均為實數, 試問: 若已知  $a+b+c$  與  $5a-b+2c$  均為有理數, 是否可推論出  $a, b, c$  必均為有理數? 若是, 則證明之; 若否, 請舉一個不成立的例子 (7 分)

2. 設  $n$  為任意正整數, 試證明:

(1)  $n < \sqrt{n^2 + 1} < n + 1$ . (4 分)

(2) 試利用(1), 證明  $\sqrt{n^2 + 1}$  為無理數. (3 分)

[提示: 若  $p, q$  為互質正整數, 且  $\frac{p^2}{q^2}$  也為整數, 則  $q = 1$ ]

(此提示可直接使用在證明中, 不需另外證明)