

國立武陵高級中學 102 學年度第二學期三年級自然組期末考數學試題

範圍：選修數學甲(II) 第二章

一、 多重選擇題：每題 7 分，共 14 分

(錯一個選項得 4 分，錯二個得 1 分；錯三個以上或未作答則該題不得分)

() 1. 判斷下列哪些函數在 $x=1$ 可微分：

(A) $f_1(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$ (B) $f_2(x) = \left[\frac{2}{2x-1} \right]$ (其中 $[]$ 為高斯符號)

(C) $f_3(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{若 } x \geq 1 \\ x^3 + x & \text{若 } x < 1 \end{cases}$ (D) $f_4(x) = \begin{cases} x^5 & \text{若 } x \geq 1 \\ x^2 + 3x & \text{若 } x < 1 \end{cases}$

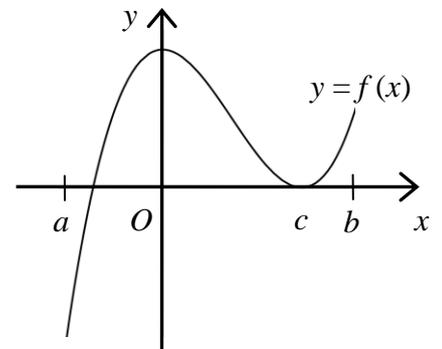
(E) $f_5(x) = \frac{x^2+1}{x-1} - \frac{x+3}{x-1}$

() 2. 下圖為 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 的圖形，另設定義域在 $[a, b]$ 的函數 $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ ，則下列各選項中關於 $g(x)$ 在定義域中的敘述有哪些正確？

(A) $g(x)$ 在 $x=a$ 有最小值 (B) $g(x)$ 在 $x=b$ 有最大值 (C) $g(x)$ 在 $x=c$ 有

反曲點

(D) 方程式 $g(x)=0$ 有兩個實根 (E) $g(x)$ 的函數圖形有兩個導數為 0 的點



二、 填充題：共 70 分

答對題數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
得分	8	16	24	31	38	44	50	54	58	62	66	70

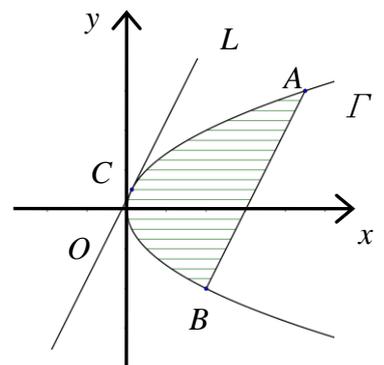
1. 計算下列各函數在 $x=2$ 的導數：

(1) $f(x) = (2x^3 - 10x + 5)^4$ (2) $g(x) = (x^6 - 15x^2 - 4)(x^5 - 2x^4 - 1)$

(3) $h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)$

2. 計算下列定積分之值：

(1) $\int_0^2 (2x^3 + x + 1) dx$ (2) $\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{3}{4}} [x] dx$ (其中 $[]$ 為高斯符號)



3. 如上圖， $A(9, 6)$ 與 $B(4, -4)$ 為拋物線 $\Gamma: y^2=4x$ 上的兩點，今作一直線 L 平行直線 AB

並與此拋物線相切，試問：

(1) 直線 L 的方程式為_____

(2) 將 Γ 與直線 AB 所圍出的圖形(斜線區域) 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為_____。

4. 試求實數 a 的範圍為_____可使得多項式函數 $f(x) = -a^2x^5 + 2(a+1)x^3 + 9x - 1$ 在整個實數上為一個遞增函數。

5. 欲使三次多項式函數 $f(x) = x^3 + 3bx^2 + bx + 5$ 的圖形與直線 $y = bx + 1$ 產生三個相異交點，則實數 b 範圍為_____。

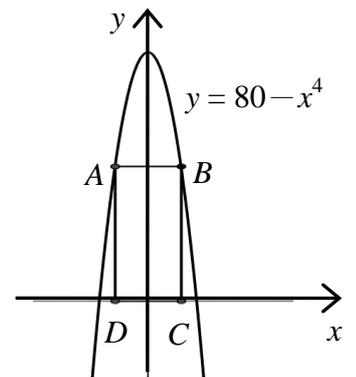
6. 如下圖，矩形的一邊 \overline{CD} 落在 x 軸上，另一邊 \overline{AB} 在 x 軸的上方，且兩頂點 A 、 B 在曲線 $y = 80 - x^4$ 上，試問當 \overline{CD} 長為_____時，可產生最大面積的矩形

7. 滿足其函數圖形在 $(-1, 12)$ 與 $(3, -20)$ 均產生極值的最低次多項式為_____

8. 已知一物體作直線運動， t 秒時此物體的速度為 $V(t) = 10t^4 - 2t - 200$ (公尺/秒)，求此物體由 1 秒至 3 秒過程中所移動的距離為_____公尺。

三、 計算題：共 16 分 (需寫出計算過程，違者不計分)

1. 描繪函數 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{7}{2}$ 的圖形 (7 分)



2. 設函數 $y = -x^2 - 1$ 的圖形與 $y = 0$ ， $x = 1$ 及 $x = 3$ 所圍成的區域為 R ，今將 $[1, 3]$ 作 n 等分，試求：

(1) 上和 U_n 與下和 L_n (6 分)

(2) 滿足 $|U_n - L_n| < \frac{1}{100}$ 的最小正整數 n 為何? (3 分)

國立武陵高級中學 102 學年度第二學期三年級自然組期末考數學解答卷

一、多重選擇題：每題 7 分，共 14 分

(錯一個選項得 4 分，錯二個得 1 分；錯三個以上或未作答則該題不得分)

1. AC	2. BCDE
----------	------------

二、填充題：共 70 分

答對題數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
得分	8	16	24	31	38	44	50	54	58	62	66	70

1.(1) 56	1.(2) -132	1.(3) -120	2.(1) 12
2.(2) $\frac{1}{6}$	3.(1) $4x-2y+1=0$	3.(2) 126π	4. $a=0$
5. $b < -1$	6. 4	7. x^3-3x^2-9x+7	8. 送分

三、計算題：共 16 分 (需寫出計算過程，違者不計分)

1.

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3(x-2)(x+1)$$

$$\Rightarrow f''(x) = 6x-3$$

x	-1	$\frac{1}{2}$	2
$f'(x)$	+ 0	- - -	0 +
$f''(x)$	- - -	0 +	+ +
$f(x)$	$\left(7 \right)$	$\frac{1}{4}$	$\left(-\frac{13}{2} \right)$

(7 分)

2. (1)

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n} \left[-\left(1 + \frac{2k}{n}\right)^2 - 1 \right]$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[-2 - \frac{4k}{n} - \frac{4k^2}{n^2} \right]$$

$$= \frac{2}{n} \left[-2n - \frac{4(n-1)n}{2} - \frac{4(n-1)n(2n-1)}{6} \right]$$

$$= -4 - \frac{4(n-1)}{n} - \frac{4(n-1)(2n-1)}{3n^2}$$

$$L_n = \sum_{k=1}^n \frac{2}{n} \left[-\left(1 + \frac{2k}{n}\right)^2 - 1 \right] \quad (6 \text{ 分})$$

$$= -4 - \frac{4(n+1)}{n} - \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

(2)

$$|U_n - L_n| < \frac{1}{100} \quad \text{所以正整數 } n \text{ 最小可取 } 1601 \text{ 以滿足不等式}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{n} < \frac{1}{100} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\Rightarrow n > 1600$$

