# 國立武陵高中 103學年度第二學期 三年級第一次段考社會組數學科試題卷(104.03.30)

範圍：數列的極限、無窮等比　班級：______　座號：______　姓名：__________

注意：試題卷共一張，答案卷一頁，作答完畢將答案卷繳回即可，填充題需計算至最簡，答案全對始計分

## 一、多重選擇題，每題8分，答錯1選項得5分，錯2選項得2分，錯3選項以上得0分，共24分

1、下列敘述何者正確？(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^n\right|$存在　(B) $\left|\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\right|$存在　(C) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=\pm1$

(D) 已知$ar\neq0$，若數列$<a\cdot r^{n-1}>$收斂，則$-1<r<1$　(E) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\overbrace{99\cdots9}^{n\text{個}}<1$

2、下列敘述何者正確？(A) 數列$<\frac{1}{n}>$收斂 (B) 級數$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$收斂　(C) 數列$<\frac{1}{n(n+1)}>$收斂　(D) 無窮級數：$1+2+4+\cdots\cdots+2^{30}+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\cdots\cdots+(\frac{1}{2})^n+\cdots\cdots$是收斂的

(E) 級數$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$收斂

3、設$<a_n>$、$<b_n>$、$<c_n>$為三個數列，下列敘述何者恆正確？ (A) 若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$存在，則$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ (B) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$，若對所有自然數$n$，均有$a_n<b_n$，則$\alpha<\beta$　(C) 存在三個數列$<a_n>$、$<b_n>$，$<c_n>$，其中$c_n=a_n-b_n$，且$<a_n>$與$<b_n>$均不是收斂數列，但$<c_n>$是收斂數列　(D) 若對所有自然數$n$，恆有$a_n\leq b_n\leq c_n$，並且$<a_n>$及$<c_n>$均是收斂數列，則$<b_n>$也是收斂數列

(E) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是收斂級數，則$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

## 二、填充題【共10格，得分依附表計算，共60分】

| 答對格數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 總得分 | 8 | 16 | 23 | 30 | 36 | 42 | 47 | 52 | 56 | 60 |

1、若首項為$a$，公比為0.01的無窮等比級數和等於循環小數$1.\overline{2}$，試求$a$值=____________

2、設$a_n=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{n^2})$，$n\geq 2$　$n\in N$，試求$\lim_{n\to\infty}a_n$之值=____________

3、設$\langle a_n\rangle$為一數列，若$\lim_{n\to\infty}(na_n)=2$，試求$\lim_{n\to\infty}a_n$之值=____________

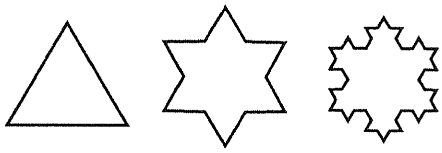
4、試求$\lim_{n\to\infty}(\frac{(0.9)^n}{5+(0.9)^n}+\frac{3^n}{1-3^n}+\frac{1-(0.4)^n}{1+(0.4)^n})$之值=____________

5、若數列$<\frac{(2x)^n}{5\cdot(3x-1)^n}>$收斂，試求$x$的範圍：____________

6、設$T_1$，$T_2$，$T_3$，…為一群多邊形，其作法如下：$T_1$為邊長等於1之正三角形，以$T_n$每一邊中間三分之一的線段為一邊向外作正三角形，然後將該三分之一線段抹去所得之多邊形為$T_{n+1}$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$（如圖所示）。令$a_n$表$T_n$之周長，請計算：

（1）$T_3$之面積=____________

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$之和=____________



$T_1$　　$T_2$　　$T_3$

7、試求無窮級數$\frac{1}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{5}{7^3}+\cdots\cdots+\frac{2n-1}{7^n}+\cdots\cdots$之和=____________

8、若$\lim_{n\to\infty}(a\sqrt{2n^2+n+1}-nb)=1$，試求數對$(a,b)$=____________

9、有一個無窮等比數列：$1,\frac{5}{2},(\frac{5}{2})^2,(\frac{5}{2})^3,\cdots\cdots,(\frac{5}{2})^{n-1},\cdots\cdots$，試問在這個數列中，整數部分是十位數者共有多少項？____________　（已知$\log 2=0.3010$）

## 三、計算證明題，沒有過程不予計分，共16分

1、數列$\langle a_n\rangle$中，已知$a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$　$(n\in N)$

（1）若已知$\lim_{n\to\infty}a_n$存在，試求$\lim_{n\to\infty}a_n$之值　　（6分）

（2）試利用數學歸納法證明$a_n\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，其中$n\in N$　（10分）

# 國立武陵高中 103學年度 第二學期 三年級第一次段考社會組數學科答案卷(104.03.30)

範圍：數列的極限、無窮等比級數

班級：________ 座號：_______ 姓名：__________________

一、多重選擇題，每題 8 分，答錯 1 選項得 5 分，答錯 2 選項得 2 分

答錯 3 選項以上得 0 分，共 24 分

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A | 2 | ACDE | 3 | CE |

二、填充題，得分依附表計算，共 60 分

| 答對格數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 總得分 | 8 | 16 | 23 | 30 | 36 | 42 | 47 | 52 | 56 | 60 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{121}{100}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $x<\frac{1}{5}$ 或 $x\geq 1$ |
| 6(1) | 6(2) | 7 | 8 | 9 |
| $\frac{10}{27}\sqrt{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{2}{9}$ | $(2\sqrt{2},\ 4)$ | 3 |

三、計算證明題 16 分(沒有計算過程不予計分)

**1、**

(1) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 6 分

(2) ① $n=1$ 時

$a_1=1\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 成立 3 分

② 設 $n=k$ 時，$a_k\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 2 分

則 $n=k+1$ 時

$$a_{k+1}=\sqrt{1+a_k}\leq\sqrt{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

由數學歸納法知，對所有 $n\in N$，$a_n\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 5 分