# 國立武陵高中 103學年度第二學期 三年級第一次段考自然組數學科試題卷(104.03.30)

範圍：極限與函數　班級：______　座號：______　姓名：____________

注意：試題卷共一張，答案卷一頁，作答完畢將答案卷繳回即可，填充題需計算至最簡，答案全對始計分

## 一、多重選擇題，每題8分，答錯1選項得5分，錯2選項得2分，錯3選項以上得0分，共24分

1、若函數 $f(x)$ 滿足 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$，試問下列何者正確？(A) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=3$ (B) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x\cdot f(x)\right)=6$ (C) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(f(x))^2}{(x-2)}=9$ (D) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{5x-1}{x+1}+\dfrac{f(x)}{x-2}\right)=6$ (E) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot f(x)\right)=0$

2、下列敘述何者正確？ (A) 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$ 為一定數，且 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，則 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$

(B) 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續 (C) 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續

(D) 若 $f(a)$ 沒有定義，則 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在 (E) 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在，則 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

3、設 $<a_n>$、$<b_n>$、$<c_n>$ 為三個數列，下列敘述何者恆正確？ (A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 存在，則 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ (B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$，若對所有自然數 $n$，均有 $a_n<b_n$，則 $\alpha<\beta$ (C) 存在三個數列 $<a_n>$、$<b_n>$，$<c_n>$，其中 $c_n=a_n-b_n$，且 $<a_n>$ 與 $<b_n>$ 均不是收斂數列，但 $<c_n>$ 是收斂數列 (D) 若對所有自然數 $n$，恆有 $a_n\le b_n\le c_n$，並且 $<a_n>$ 及 $<c_n>$ 均是收斂數列，則 $<b_n>$ 也是收斂數列 (E) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收斂級數，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

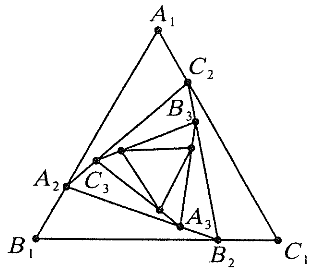
## 二、填充題【共10格，每格6分，共60分】

1、若首項為 $a$，公比為 $0.01$ 的無窮等比級數和等於循環小數 $1.\overline{2}$，試求 $a$ 值=____________

2、試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+(2n-1)}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)$ 之值=____________

3、設$a,b\in R$，若函數$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+ax+b}{(x-1)^2} &, x\neq 1\\ 3 &, x=1\end{cases}$ 在$x=1$連續，試求數對$(a,b)=$____________

4、如圖所示，在邊長為1的正三角形$\triangle A_1B_1C_1$中各邊取$3:1$等分點分別為$A_2$，$B_2$，$C_2$，使得$\overline{A_1A_2}=3\overline{A_2B_1}$，$\overline{B_1B_2}=3\overline{B_2C_1}$，$\overline{C_1C_2}=3\overline{C_2A_1}$，如此繼續作下去，可得$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，$\triangle A_3B_3C_3$，……，設其面積分別為$a_1$，$a_2$，$a_3$，……，




試求無窮級數$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots$之和=____________

5、若數列$<\dfrac{(2x)^n}{5\cdot(3x-1)^n}>$收斂，試求$x$的範圍=____________

6、設$a,b,c\in R$，$f(x)=ax^3+bx^2+cx-6$，若已知$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=k$存在，試求$a+b+c+k$之值=____________

7、試求無窮級數$\dfrac{1}{7}+\dfrac{3}{7^2}+\dfrac{5}{7^3}+\cdots\cdots+\dfrac{2n-1}{7^n}+\cdots\cdots$之和=____________

8、試求函數$f(x)=5x-[3x]$在$-\dfrac{1}{2}\le x\le 2$中所有不連續點的總和=____________

（其中[ ]表高斯符號）

9、若$\lim\limits_{n\to\infty}(a\sqrt{2n^2+n+1}-nb)=1$，試求數對$(a,b)=$____________

10、有一個無窮等比數列：$1,\dfrac{5}{2},(\dfrac{5}{2})^2,(\dfrac{5}{2})^3,\ldots\ldots,(\dfrac{5}{2})^{n-1},\ldots\ldots$，試問在這個數列中，整數部分是十位數者共有多少項？ ____________ （已知$\log 2=0.3010$）

## 三、計算證明題，沒有過程不予計分，共16分

1、(1) 試證明：$3^n>n^3$對每一個大於3的正整數$n$都成立 （10分）

(2) 試求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n}{3^n}$之值 （6分）

# 國立武陵高中 103學年度第二學期 三年級第一次段考自然組數學科答案卷(104.03.30)

範圍：極限與函數

班級：________ 座號：_______ 姓名：________________

## 一、多重選擇題，每題8分，答錯1選項得5分，答錯2選項得2分

答錯3選項以上得0分，共24分

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | D | 2 | AC | 3 | CE |

## 二、填充題，每格6分，共60分

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{121}{100}$ | 2 | $(-3,2)$ | $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ | $x<\frac{1}{5}$ 或 $x\ge 1$ |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 7 | $\frac{2}{9}$ | $\frac{20}{3}$ | $(2\sqrt{2},\ 4)$ | 3 |

## 三、計算證明題16分(沒有計算過程不予計分)

(1) ① $n=4$ 時

左式 $=3^4=81>4^3=64=$ 右式，原不等式成立　　3分

② 設 $n=k$ 時，$3^k>k^3$　$(k\ge 4, k\in N)$　　2分

則 $n=k+1$ 時

左式 $=3^{k+1}=3\cdot 3^k>3\cdot k^3$　；　右式 $=(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$

相減可得：左式－右式 $>3k^3-(k^3+3k^2+3k+1)=2k^3-3k^2-3k-1$

$$\begin{aligned}&=2k^3-3k^2-3k-1\\&=2k\cdot k^2-3k^2-3k-1\\&\ge 8k^2-3k^2-3k-1\\&=5k^2-3k-1\\&\ge 5\cdot 4k-3k-1\\&=17k-1>0\end{aligned}$$

所以 $3^{k+1}>(k+1)^3$

由數學歸納法知，對所有 $n\ge 4, n\in N$，$3^n>n^3$　　5分

(2) 0　　6分