

武陵高中 103 學年第二學期第二次期中考高二數學(社會組)題目卷

要在「答案卷」上作答

計算題(10%，每題 10 分，要有過程，否則該題 0 分)

1. 就實數  $a$  的值，討論方程組 
$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+2z=3 \\ x+2y+3z=a \end{cases}$$
 的解 (當有無限多組解時，要將解  $x, y, z$  用參

數式表示，否則扣分)

填充題(70%，每格 5 分，答案都要算出數值，未完全答對該格 0 分)

2. 已知  $A$  為  $2 \times 3$  階矩陣， $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$  滿足  $a_{ij} = \begin{cases} i, & i > j, \\ j, & i \leq j, \end{cases}$  求矩陣  $A$  的所有元的總和為

\_\_\_\_\_

3. 已知  $A$  為  $2 \times 1$  階矩陣， $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ， $B$  為  $1 \times 2$  階矩陣， $B = [-1 \quad -6]$ ，設  $C = AB$ ，求矩陣  $C$  的所有元的總和為\_\_\_\_\_

4. 設  $A, B$  均為 2 階方陣，若  $A+B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ ， $A-B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，其中  $a, b, c, d$  為實數，求  $a+b+c+d$  之值為\_\_\_\_\_

5. 設  $A$  為 2 階方陣，若行列式  $\det(A) = 3$ ，求行列式  $\det(5A)$  之值為\_\_\_\_\_
6. 已知  $X$ 、 $Y$ 、 $A$ 、 $B$  都是  $1 \times 2$  階矩陣， $P$  為  $2 \times 2$  階矩陣， $X = [3 \ 4]$ ， $Y = [7 \ 9]$ ， $A = [1 \ 5]$ ， $B = [2 \ 1]$ ， $XP = A$ ， $YP = B$ ，求矩陣  $P$  的所有元的總和為\_\_\_\_\_
7.  $a, b$  為實數， $A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ b & -2 \end{bmatrix}$  滿足  $A = A^{-1}$ ，求  $a + b$  之值為\_\_\_\_\_
8. 設有甲、乙兩支瓶子，開始時，甲瓶裝有  $\frac{1}{4}$  公升的水，乙瓶裝有  $\frac{3}{4}$  公升的水。每一輪操作都是先將甲瓶水量的三分之一倒入乙瓶，然後再將乙瓶水量的三分之一倒回甲瓶。第一輪、第二輪、第三輪、……不斷操作下去，求穩定狀態時，甲瓶中有\_\_\_\_\_公升的水
9. 設  $D$  為 2 階方陣， $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $PDP^{-1} = A$ ， $D^4 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，其中  $a, b, c, d$  為實數，求  $a + b + c + d$  之值為\_\_\_\_\_

10. 設  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 若  $(I - \frac{1}{2}J)^5 = aI + bJ$ , 其中  $a, b$  為實數, 求  $a+b$  之值為

\_\_\_\_\_

11. 實數數列  $\langle a_n \rangle$  有如下的關係:  $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ ,  $n \in N$ . 若 2 階方陣  $A$  滿足

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}, \text{ 求 } A \text{ 為 } \underline{\hspace{2cm}}$$

12. 設  $A = \begin{bmatrix} 648 & -647 \\ 649 & -649 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -648 & 647 \\ -649 & 648 \end{bmatrix}$ , 設  $C = A^2 + AB + B^2$ , 求行列式  $\det(C)$  之值為

\_\_\_\_\_

13. 設  $A$  是一個  $3 \times 3$  矩陣, 且  $A \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $A \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ , 其中  $a, b, c$  為實數,

求  $a+b+c$  之值為 \_\_\_\_\_

14. 捷運局調查通勤上班族每月使用交通工具的狀況如下：原來搭捷運者有 80% 會繼續搭捷運，有 10% 改為開車，有 10% 改為騎機車；原來開車者有 20% 會改搭捷運，有 20% 繼續開車，有 60% 改為騎機車；原來騎機車者有 10% 會改搭捷運，有 30% 改為開車，有 60% 繼續騎機車。已知目前有 30% 搭捷運，有 50% 開車，有 20% 騎機車，求
- (1) 兩個月後搭捷運者占通勤上班族的比例為 \_\_\_\_\_
- (2) 模式不變，就長期而言，呈穩定狀態時搭捷運者占通勤上班族的比例為 \_\_\_\_\_

多重選擇題(20%，每題 10 分，每題只錯一個選項得 5 分，其他情況該題 0 分)

15. 下列哪些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  ?

(1)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$       (2)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$       (3)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$       (4)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

16. 設  $A, B, C$  均為 2 階方陣，選正確的選項。

- (1) 若  $A^2 = B^2$ ，則  $A = B$  或  $A = -B$   
 (2) 若  $\det(A) = 0$ ，則  $A$  沒有乘法反方陣  
 (3) 若  $A^{-1}$  存在且  $AB = AC$ ，則  $B = C$   
 (4) 若  $A^{-1}$  和  $B^{-1}$  都存在，則  $AB = BA$

背面有題

## 教師用解答

武陵高中 103 學年第二學期第二次期中考高二數學(社會組) 答案卷

班級                  姓名                  座號

計算題(10%，每題 10 分，要有過程，否則該題 0 分)

1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & a-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$a \neq 2$  無解                  (2 分)

$a = 2$  無限多組解          (2 分) 解為  $x = 5t, y = 1 - 4t, z = t, t \in R$  (4 分)

填充題(70%，每格 5 分，答案都要算出數值，未完全答對該格 0 分)

|    |               |  |     |    |       |               |
|----|---------------|--|-----|----|-------|---------------|
| 2  | 3             | 4  | 5   | 6  | 7     | 8             |
| 13 | -28           | 35   | 75  | -9 | 5     | $\frac{3}{5}$ |
| 9  | 10            | 11   | 12  | 13 | 14(1) | 14(2)         |
| 82 | $\frac{1}{2}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ | 650 | 4  | 37.1% | 40%           |

多重選擇題(20%，每題 10 分，每題只錯一個選項得 5 分，其他情況該題 0 分)

|    |    |
|----|----|
| 15 | 16 |
| 12 | 23 |