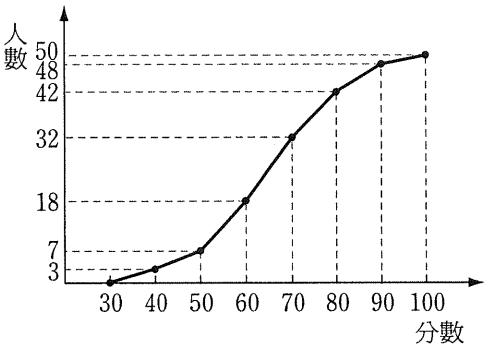
國立武陵高級中學 103 學年度第二學期第一次期中考高一數學科試題卷

一.單選題(共佔 10 分，每題 5 分，答錯不倒扣)

1. 高一某班期末考 50 位同學的數學成績之累積次數分配折線圖如附圖，若依此圖計算其算術平均數與標準差，則下列何者正確？

   (A)算術平均數 $\mu = 70$　(B)算術平均數 $\mu = 68$　(C)標準差 $\sigma = \dfrac{\sqrt{53}}{5}$　(D)標準差 $\sigma = 2\sqrt{53}$



2. 考慮下列五組數據：

   A：5,5,5,5,5,5,5,5,5

   B：4,4,4,5,5,5,6,6,6

   C：1,2,3,4,5,6,7,8,9

   D：2,4,6,8,10,12,14,16,18

   E：-2,-4,-6,-8,-10,-12,-14,-16,-18

   其標準差分別為 σ_A 、 σ_B 、 σ_C 、 σ_D 、 σ_E ，下列請選出正確的選項。

   (A) σ_A 最大　(B) σ_E 最小　(C) $\sigma_E = 2\sigma_C$　(D) $\sigma_D >\ \sigma_E$　(E) $\sigma_D = \sigma_C$

二.多選題(共佔 28 分，每題全對得 7 分，錯一個選項得 4 分，錯二個選項得 1 分)

1. 有一個 71 項的等差數列 a_1，a_2，$\cdots$，a_{71}，其和為 0 且 $a_{51} = 51$，則下列何者正確？

   (A) $a_1 + a_{71} > 0$　(B) $a_2 + a_{70} < 0$　(C) $a_3 + a_{69} = 0$　(D) $a_{36} = 36$　(E) $a_1 < 0$

2. 下列敘述何者正確？

   (A)若 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n^2 + 2n + 3$，則數列＜$a_n$＞為等差數列

   (B)若數列＜a_k＞為等比數列，則數列＜$a_k^{\ 2}$＞亦為等比數列

   (C)若 $a_k = 5k + 3$ ，則數列＜$3a_k + 2$＞為等差數列

   (D)若 $2a_{k+1} = a_k + a_{k+2}$ ，則數列＜a_k＞為等差數列

   (E)若數列＜a_k＞與＜b_k＞皆為等比數列，則數列＜$a_k + b_k$＞亦為等比數列

3. 有一筆統計資料，共有 8 個數據如下： $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$ ，且已知 $\sum_{i=1}^{8} x_i = 544$ ， $\sum_{i=1}^{8} x_i^{\ 2} = 37398$ ，則下列關於這 8 個數據統計量值的敘述何者正確？

   (A)算術平均數 $\mu = 68$

   (B)離均差平方和 $\sum_{i=1}^{8} (x_i - \mu)^2 = 406$

   (C)變異數為 50.75

   (D)離均差之和 $\sum_{i=1}^{8} (x_i - \mu) = 0$

   (E)標準差 $\sigma > \sqrt{55}$

4. 用長度為 1 的木棒依照下列的規則排成正三角形，如下列圖 1 至圖 3，圖 1 用了 3 根木棒，圖 2 用了 7 根木棒，圖 3 用了 12 根木棒，依此類推：

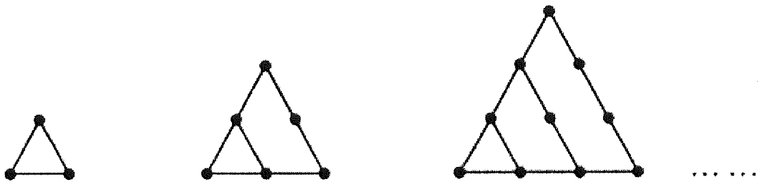


圖 1　　圖 2　　圖 3

試選出下列正確的選項。

(A)圖 5 使用了 25 根木棒

(B)圖 12 與圖 10 相差 27 根木棒

(C)圖 n 使用了 $\dfrac{n(n+3)}{2}$ 根木棒

(D)從圖 1 排到圖 n，全部共需要 $\sum_{i=1}^{n}(i^2+5i)$ 根木棒

(E)從圖 1 排到圖 12，全部共需要 520 根木棒

三.填充題(共佔 46 分)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8
得分	8	16	23	29	34	38	42	46

1.一等差數列共十項，若第四項與第七項的和為 46，則此數列的總和為_______。

2.等比數列$\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，1，…的第 10 項為__________。

3.試求級數 $1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+100\times101$ 之和為_______。

4.已知級數$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{299}{300}$，試求正整數 n 之值為______。

5.若數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=\dfrac{1}{7}$，$a_n=\dfrac{7}{2}\cdot a_{n-1}\cdot(1-a_{n-1})$，其中 $n\geq2$，則$a_{2015}=$______。

6.設數列$\langle a_n\rangle$的首項$a_1=-1$，且滿足$a_n=-3a_{n-1}+8$，$n\geq2$，則一般項$a_n=$____。（以 n 表示之）

7.若數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+3^{n-1}$，$n\geq1$，試求$\sum_{k=1}^{n}a_k=$______。

8.一筆統計資料有 11 個數據如下(不完全依大小排列)：2,4,4,5,5,6,7,8,11,x 和 y。已知這些數據的算術平均數與中位數都是 6，請問此筆數據資料的標準差的最大可能值為_______。

四.計算證明題(共佔 16 分，每題需有詳細的計算或證明過程)

1.人數均為 20 人的甲乙兩組學生，每個人皆接受以 10 分為滿分的英文口試測驗，得到以下數據：甲組 20 人的算數平均數為 8 分，標準差為 2 分；乙組 20 人的算數平均數為 7 分，標準差為$\sqrt{2.5}$分。今將甲乙兩組合併，試求兩組合併後 40 人之算術平均數與標準差各為何?(8 分)
(標準差以根號表示即可)

2.對於所有正整數 n，$3^{2n+1}+2^{n+2}$ 恆為某一質數 p 的倍數，則

(1)試推測 p 之值為何？(2 分)

(2)試利用數學歸納法證明(1)之結果。(6 分)

國立武陵高級中學103學年度第二學期第一次期中考高一數學科答案卷

班級：______ 座號：_____ 姓名：__________

一.單選題(共佔10分，每題5分，答錯不倒扣)

1. **D** 2. **C**

二.多選題(共佔28分，每題全對得7分，錯一個選項得4分，錯二個選項得1分)

1. **CE** 2. **BCD** 3. **ABCD** 4. **ABE**

三.填充題(共佔46分)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8
得分	8	16	23	29	34	38	42	46

1. 230 2. $-8\sqrt{2}$ 3. 343400 4. 299

5. $\frac{6}{7}$ 6. $(-3)^n+2$ 7. $\frac{3^n-1+2n}{4}$ 8. $\sqrt{\frac{60}{11}}=\frac{2\sqrt{165}}{11}$

四.計算證明題(共佔16分，每題需有詳細的計算或證明過程)

1. 設甲：$x_1,x_2,\dots,x_{20}$，乙：$x_{21},x_{22},\dots,x_{40}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{20}x_i=20\times 8=160\text{，}\sum_{i=1}^{20}x_i^2=20(8^2+2^2)=1360$$

$$\sum_{i=21}^{40}x_i=20\times 7=140\text{，}\sum_{i=21}^{40}x_i^2=20(7^2+\sqrt{2.5}^2)=1030$$

所以$\sum_{i=1}^{40}x_i=160+140=300$ *(2分)*，$\sum_{i=1}^{40}x_i^2=1360+1030=2390$ *(2分)*

故$\mu=\frac{\sum_{i=1}^{40}x_i}{n}=\frac{300}{40}=7.5$ *(2分)*

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{40}x_i^2-n\mu^2}{n}}=\sqrt{\frac{2390-40\times(7.5)^2}{40}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$ *(2分)*

2. (1)推測$p=7$ *(2分)*

(2) ①$n=1$時，顯然成立*(2分)*

②設$n=k$ ($k\in N$)時成立，亦即$3^{2k+1}+2^{k+2}=7t$，$t\in Z$

當$n=k+1$時，$3^{2n+1}+2^{n+2}=3^{2k+3}+2^{k+3}=9\times 3^{2k+1}+2\times 2^{k+2}$

$=2(3^{2k+1}+2^{k+2})+7\times 3^{2k+1}=2\times 7t+7\times 3^{2k+1}$為7的倍數

所以$n=k+1$時也成立 *(3分)*

故由①②及數學歸納法知對所有的正整數n，$3^{2n+1}+2^{n+2}$恆為質數7的倍數。*(1分)*