102 學年度下學期高三自然組第一次段考試題　　班級:　坐號:　姓名

一. 多重選擇題:每一題 10 分(錯一個選項得 6 分錯兩個選項得 2 分錯三個以上不給分)

1. 下列何者正確?(A)設< a_n >為一無窮數列，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right| = 1$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

(B)若 $n \in N, n\geq 1000$ 恆有 $a_n \leq b_n \leq c_n$, 並且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ 則< b_n >也是收斂數列

(C) 設< a_n >為一等比數列且 $-1 < r \leq 1$，則< $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ >亦為收斂數列

(D)設< a_n >為一數列且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收斂級數.

(E) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n}$ 存在, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在

2. 下列何者正確?

(A) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ 且 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = M$ 若 L=M 則函數 $y = f(x)$ 在 x=a 連續

(B)函數 $y = f(x)$ 在 x=a 連續則 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 存在

(C)若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的定義域相同，則 $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

(D)設 f 是〔a，b〕上的連續函數，且 $f(a) \neq f(b)$，若 $f(a) < k < f(b)$，則在(a，b)內至少有一點 c 使得 $f(c) = k$

(E) 函數 $y = f(x) = |x|$ 在 x=0 時一次導數存在

二.填充題:每格 6 分.　　(已知 $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a}$)

1. 設 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}, x \neq 1$, 試求 f(f(f(f(x))))=________　　2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + \pi^{n+1}}{\pi^{n-1} - 3^n} =$ ______

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\left[x - [x]\right] =$ ________

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3} + \dfrac{4}{n^3} + \dfrac{9}{n^3} + \cdots + \dfrac{n^2}{n^3}\right)$

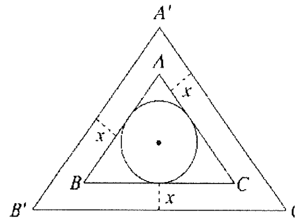
5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\left|-x^2 + 2x - 3\right| + x - 5}{x - 2} =$ ______　　6. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n + 3^n}{6^n} =$ ________

7 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{2}}{x - 1} =$ __________

8. 若多項式 $f(x)$ 以 $(x-1)^2$ 除之，餘式為 $3x+5$，則 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 f(1)-f(x^3)}{x-1}=$______。

9. $y=f(x)=\begin{cases} x^2+x+b, x\le 3 \\ \mathrm{a}x-6, x>3 \end{cases}$ 在 x=3 導數存在則(a, b)=________

10. 已知△ABC 的周長為 L，內切圓的半徑為 r。今在△ABC 之外側作△A' B' C' 使得 $\overline{A'B'}//\overline{AB}$，$\overline{B'C'}//\overline{BC}$，$\overline{C'A'}//\overline{CA}$ 且二平行線間均相距 x 單位，若△A' B' C' 的面積為 $f(x)$，試以 L 及 r 表示 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$ = __________



三. 計算證明題:(要寫出計算過程)

1. 設 n 為正整數，對於三次方程式 $n^2x^3+nx-1=0$ 而言，

(1) 試證明：此方程式恰有一實根。(4 分)

(2)設 $n^2x^3+nx-1=0$ 恰有一實根 x_n，實根 x_n 形成一數列 $\langle x_n\rangle$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 之值 (4 分)

2. (1)試證明: $\forall n\ge 8, 3^n\ge n^4$　　(5 分)

(2)試證明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3^{n+1}}=0$　　(3 分)

(3)求無窮級數 $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\cdots+\dfrac{n}{3^n}+\cdots$ 的和　　(4 分)

102學年度下學期高三自然組第一次段考試題　　班級:　　坐號:　　姓名

答案卷:

一.多重選擇題:每一題10分(錯一個選項得6分錯兩個選項得2分錯三個以上不給分)

1.	B	2.	D

二.填充題:每格6分.

1	x	2	π^2	3	0	4	$\frac{1}{3}$	5	3
6	$\frac{3}{2}$	7	$\frac{2}{3\sqrt[3]{4}}$	8	7	9	(7,3)	10	$\frac{L}{2r}$

三.計算證明題:(要寫出計算過程)

1.(1)

利用勘根 (2分)

$x_1 > x_2$

$n^2x_1^3 > n^2x_2^3$

$n^2x_1^3+nx_1 > n^2x_2^3+nx_2$

$n^2x_1^3+nx_1-1 > nx_2^3+nx_2-1$

證出遞增再給(2分)

(2)

$f(x)=n^2x^3+nx-1$

$f(0)<0$

$f(\frac{1}{n})>0$

$0<x_n<\frac{1}{n}$ (4分)

$\lim_{n\to\infty} 0=0$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n=0$

2.(1)

用數學歸納法.

i) $n=1$ 成立 給1分

ii) 設 $n=k$ 成立

證出 $n=k+1$ 也成立

再給4分

(2)

$3^{n+1}>3n^4$

$\frac{1}{3^{n+1}}<\frac{n}{3^{n+1}}<\frac{n}{3n^4}$ (3分)

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n^4}=0$

$\therefore$ 成立

(3)

令 $S_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^n}$

$\frac{1}{3}S_n=\quad\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}$

$\frac{2}{3}S_n=\frac{\frac{1}{3}[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}$

(4分)

$S=\frac{3}{4}$