國立武陵高級中學 102 學年度第二學期第一次期中考三年級自然組數學科試題

一.填充題

A.第一部份(每小題 5 分，共 30 分)

1.試求下列的極限值或級數和(若存在請寫出答案，不存在請寫不存在)：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{4+2x}-\frac{1}{4})$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{[x]}{2x-1}=$______。([ ]為高斯符號)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{k-2}+4+(-1)^{k+1}}{5^{k-1}}=$______。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$______。

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}=$______。

(6) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{k^2}{k^2+2k+1}-\frac{k^2+2k+1}{k^2+4k+4})=$______。

B.第二部份

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8
得分	8	16	24	30	36	42	47	52

2.求函數 $f(x)=\frac{2x-1}{3x+4}$ 的值域為______。(以集合表示之)

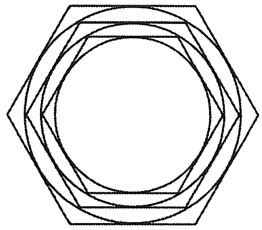
3.假設正數 a、b 滿足 $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+ax-b)=9$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a^{n+1}+ab^{n-1}}{a^{n-1}+2b^{n}})=$______。

4.若 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2+1}{n+1}-\alpha n-\beta)=0$，則數對$(\alpha,\beta)$=______。

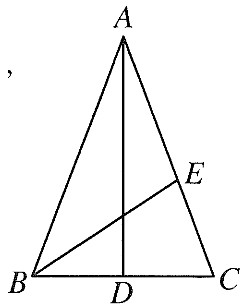
5.設 $f(x)=\begin{cases}1\ ,當x>0\\0\ ,當x=0\\-1,當x<0\end{cases}$，且 $g(x)=2^x$，求合成函數 $f(g(x))=$______。

6.若 a,b,c 為實數，且 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x<3\\ bx+c, & x=3\\ \frac{x^2-cx-3}{x-3}, & x>3\end{cases}$ 是一連續函數，則數對 $(a,b,c)=$______。

7.在周長為 36 的正六邊形T_1內作一內切圓C_1，在內切圓C_1內作一內接正六邊形T_2，在正六邊形T_2內作一內切圓C_2，仿上繼續作下去，得一系列的內切圓C_1、C_2、C_3、C_4、…、C_n、…，則所有內切圓（即C_1、C_2、C_3、C_4、…、C_n、…）的面積總和＝_______。



8.如右圖，已知ΔABC中，$\overline{AB}=\overline{AC}$、$\overline{BC}=4$，$D$、$E$分別在$\overline{BC}$、$\overline{AC}$線段上，且$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\angle ABE=\angle EBC$。若$\overline{AD}$長為$h$，$\overline{CE}$長為$f(h)$，則$\lim\limits_{h\to 0}f(h)=$______。



9.已知$f(x)$為多項式函數，且$f(x)$滿足下二條件：

(甲)$f(3)=3$

(乙)極限$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{|x-2|}$存在，

試問滿足此二條件的最低次多項式$f(x)=$_______。

二.計算證明題

1.設$y=f(x)$為一多項式函數，若$f(1)>2$，$f(2)<6$，
試證：存在一實數c介於 1 與 2 之間，使得$f(c)=c^2+c$。 (6 分)

2. (1)試證：$k\le\sqrt{k(k+2)}\le k+1$，對每一個自然數k都成立。 (4 分)

(2)承(1)試證：$\dfrac{n(n+1)}{2}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+2)}\le\dfrac{n(n+3)}{2}$。 (4 分)

(3)求$\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+2)}]$的值。 (4 分)

國立武陵高級中學 102 學年度第二學期第一次期中考三年級自然組數學科答案卷

班級：__________ 座號：__________ 姓名：__________

一.填充題

A.第一部份(每小題 5 分，共 30 分)

1.(1) $-\frac{1}{8}$ (2) 0 (3) $\frac{20}{3}$ (4) 2 (5) 不存在 (6) $-\frac{3}{4}$

B.第二部份

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8
得分	9	18	26	33	39	44	48	52

2. $\{y \mid y\in R, y\neq \frac{2}{3}\}$ **3.** $\frac{1}{6}$ **4.** $(1,-1)$

5. 1 **6.** $(\frac{10}{9}, \frac{2}{3}, 2)$ **7.** 108元

8. $\frac{4}{3}$ **9.** $3(x-2)^2$

二.計算證明題

1.(6 分)

令 $g(x)=f(x)-(x^2+x) \Rightarrow g(x)$ 為連續函數 ← 2分

又 $g(1)=f(1)-2>0$

$g(2)=f(2)-6<0$ ← 2分

$\therefore$ 由勘根定理知 $\exists\, c\in(1,2)$，使得 $g(c)=0$，即 $f(c)=c^2+c$ ← 2分

2.(12 分)

(1) $\sqrt{k(k+2)} \geq \sqrt{k\times k} = k$ ← 2分

$\sqrt{k(k+2)} = \sqrt{k^2+2k} \leq \sqrt{k^2+2k+1} = k+1$ 2分

$\therefore k \leq \sqrt{k(k+2)} \leq k+1$

(2) $1 \leq \sqrt{1\times 3} \leq 2$

$2 \leq \sqrt{2\times 4} \leq 3$ ← 2分

$3 \leq \sqrt{3\times 5} \leq 4$

$\vdots$

$+)\ n \leq \sqrt{n(n+2)} \leq n+1$

$\frac{n(n+1)}{2} \leq \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+2)} \leq \frac{n(n+3)}{2}$ ← 2分

(3) 由 (2) 知

$\frac{n(n+1)}{2n^2} \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+2)} \leq \frac{n(n+3)}{2n^2}$

又 $\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+3)}{2n^2} = \frac{1}{2}$ 2分

由夾擠定理知

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+2)} = \frac{1}{2}$ 2分