102 202 -214

國立武陵高中 102 學年度 第二學期 二年級自然組數學科第二次段考試題卷(103.05.14)

範圍：空間平面、矩陣　班級：_______　座號：______　姓名：________________　得分:________

注意：以下試題中 A^{-1} 代表矩陣 A 之乘法反方陣，試題共四頁，答案卷一頁，作答完畢將答案卷繳回即可，填充題答案需計算至最簡、答案全對始計分

一、多重選擇題【每題 10 分，答錯 1 選項得 6 分，錯 2 選項得 2 分，錯 3 選項以上得 0 分，共 20 分】

1、關於平面上的線性變換，試選出正確的選項：(A) 平面上一點 $P(x,y)$ 變換到 $P'(x',y')=(ax+by,cx+dy)$ 所對應的變換矩陣為 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$　(B) 若坐標平面上有一個正方形的面積是 a，則在伸縮變換 $P(x,y)$ 變換到 $P'(3x,\frac{y}{3})$ 的變換下，這正方形變成一個長方形，其面積仍是 a　(C) 若 $\triangle ABC$ 在推移變換 $P(x,y)$ 變換到 $P'(x+3y,y)$ 之下，變換成 $\triangle A'B'C'$，則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 的面積相等　(D) 矩陣 $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 表在鉛直方向伸長 3 倍再對直線 $y=x$ 的鏡射的變換矩陣　(E) 矩陣 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 為平面上任一點對原點逆時針旋轉 60° 的旋轉矩陣

2、設 A、B 皆為三階方陣，I 為三階單位方陣，試問下列何者必正確？(A) 若 $AB=A$，則 $B=I$　(B) $\det(5A)=5\det(A)$　(C) $A^3-8I=(A-2I)(A^2+2A+4I)$　(D) 若 A、B 皆有乘法反方陣，則 $A+B$ 亦有乘法反方陣　(E) 若 A、B 均有乘法反方陣，則 $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

二、填充題【共 10 格，每格 6 分，共 60 分】

1、空間中向量 $\overrightarrow{a}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{b}=(2,3,1)$，$\overrightarrow{c}=(1,1,k)$，$\overrightarrow{d}=(-1,0,4)$，若不存在實數 x、y、z 使得 $\overrightarrow{d}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}+z\overrightarrow{c}$，試求實數 k 值＝____________

背面有題

2、若某公司有甲、乙兩個部門，每半年員工會輪調一次，輪調的方式是將原甲部門一半的員工調到乙部門，原乙部門的員工則全部調到甲部門，若甲、乙兩部門原各有a_0、b_0人，輪調n次後甲、乙兩部門的人數分別為a_n、b_n人（$n\in N$），若$\begin{bmatrix} a_7 \\ b_7 \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} a_5 \\ b_5 \end{bmatrix}$，試求二階方陣$A$ = ____________

3、設$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & k^2 & k \end{bmatrix}$為一方程組的增廣矩陣，若此方程組無解，試求實數$k$值 = ____________

4、矩陣$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 6 \\ 2 & b & 3 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 經列運算得到矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & c \end{bmatrix}$，試求$a+b+c$之值 = ____________

5、已知二階方陣A為對直線$L: x+2y=0$的鏡射矩陣，則A=____________

6、設矩陣$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，且$A \neq kI$，$a,b,c,d,k \in R$，其中$I$為二階單位方陣，$O$為二階零矩陣，已知$A^2-A-2I=O$，若$A^{-1}=sA+tI$，試求實數$5s-2t$之值 = ______

7、三元一次聯立方程組$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 3x+y-2z=-1 \\ 4x-3y-z=-4 \end{cases}$的增廣矩陣為$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$，對矩陣$A$進行列運算，

步驟1：第1列乘以-3加到第2列；第1列乘以-4加到第3列，得矩陣B。步驟2：矩陣B的第2列乘以$-\frac{1}{5}$得矩陣C。我們將上述的列運算以矩陣乘積$XA=C$來表示，試求$\det(X)$之值= ______

8、方陣$\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & -2 \end{bmatrix}$把直線$2x-y=3$變換到直線$3x+7y=15$，試求實數對$(a,b)=$ ______

9、二階方陣$A=\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$，欲使$A^n=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，試求最小自然數$n=$ ______

背面有題

10、設$A=\begin{bmatrix}1&3\\1&3\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，若$(I+\frac{1}{2}A)^4=aI+bA$，試求實數對$(a,b)=$ ________

三、計算證明題【2大題，共20分】

1、設甲袋內有3紅球，乙袋內有2白球，現在每次同時自袋中隨機取出1球交換再放回袋內，此為一回合，並重複此操作，試問：

(1) 請針對甲袋內球的顏色狀態，建構轉移矩陣A，並附機率計算說明　(4分)

(2) 當交換進行兩回，甲袋內為2紅1白球的機率多大？（承(1)，用矩陣乘法求解才得分）(4分)

(3) 長期交換後，甲袋內球的顏色分布機率會漸趨穩定，則穩定時2紅1白球在甲袋內的機率為多少？（承(1)，使用矩陣乘法求解才得分）　(4分)

2、設s,t為非零的實數，矩陣$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，令$P(s)=sA+\frac{1}{s}B$，試證明：　$P(st)=P(s)P(t)$

(8分)

8

國立武陵高中 102 學年度 第二學期 二年級自然組數學科第二次段考答案卷 (103.05.14)

班級：________ 座號：_______ 姓名：________________

一、多重選擇題【每題 10 分，答錯 1 選項得 6 分，答錯 2 選項得 2 分，答錯 3 選項以上得 0 分】

1	BCD	2	C

二、填充題【共 10 格，每格 6 分，需全對才給分】

1	2	3	4	5
-2	$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	-3	5	$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$
6	7	8	9	10
$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$(3,1)$	12	$(1,20)$

三、計算證明題 20 分，每小題 4 分（沒有過程不計分）

1、

(1) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ 4 分

(2) $\frac{1}{2}$ 4 分

(3) $\frac{3}{5}$ 4 分

2、 8 分

$$AB = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = A$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = B$$

$$\begin{aligned} p(s)p(t) &= (sA + \tfrac{1}{s}B)(tA + \tfrac{1}{t}B) \\ &= stA^2 + \tfrac{s}{t}AB + \tfrac{t}{s}BA + \tfrac{1}{st}B^2 \\ &= stA + \tfrac{1}{st}B \\ &= p(st) \end{aligned}$$