301-302, 304-315

市立武陵高中 109 學年度 第二學期 三年級自然組數學科一段考試題(110.03.31)

範圍：極限　　　　　　　　　　　　座號：_____　姓名：__________

注意：試題共一張雙面列印，答案卷一頁，作答完畢將答案卷繳回即可，填充題需計算至最簡，答案全對始計分

一、多重選擇題，每題8分，答錯1選項得5分，錯2選項得2分，錯3選項(含)以上得0分，共16分

1、下列敘述哪些選項是正確的？

(A) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續

(B) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續，則 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在

(C) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續

(D) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續，則 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

(E) 若 $f(a)$ 存在，則 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

2、下列選項關於收斂、發散性的敘述何者正確？

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\left\{x^2\cdot\cos\dfrac{1}{x}\right\}$ 的極限值不存在

(B) 若 $<a_n>$ 為遞增數列，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在

(C) 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\log_{\cos 1}\sin 1\right)^n$ 收斂

(D) $\left(\dfrac{2}{1}-\dfrac{3}{2}\right)+\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{3}\right)+\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{n+2}{n+1}\right)+\cdots=2$（等號左邊有無窮項）

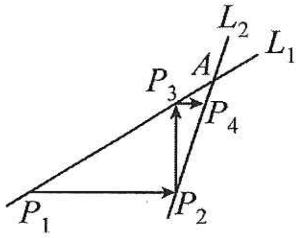
(E) 若無窮數列 $<a_n>$ 收斂至 0，則無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂

二、填充題【10 格，每格 7 分，共 70 分，需全對才給分 】

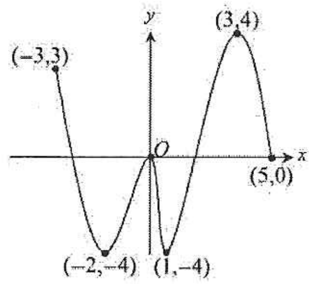
1、設函數 $y=f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{10x-x^2}}$ 之定義域為 $\{x|1\le x\le 8, x\in R\}$，試求 $y=f(x)$ 之值域=________

（以集合表示）

2、如圖所示，兩直線 $L_1: x-3y=k_1$，$L_2: 2x-y=k_2$ 交於 A 點，從 L_1 上一點 P_1 向正右方走 60 個單位到 L_2 上的 P_2 點，再從 P_2 向正上方走到 L_1 上的 P_3 點，再從 P_3 向正右方走到 L_2 上的 P_4 點，依此規則持續走下去，在 L_1 上得 P_1，P_3，P_5，…，在 L_2 上得 P_2，P_4，P_6，…，試求 $\sum_{k=1}^{\infty}\overline{P_kP_{k+1}}$ 之值=________



3、函數 $f(x)$ 的圖形如右，試求方程式 $f(f(x))=-4$ 共有________個實數解



4、若 $a,b\in R$ 且 $\lim_{n\to\infty}(a\sqrt{2n^2+n+1}-nb)=1$，試求數對 (a,b)=________

背面有題

5、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+2}+4^{2n+1}+7\cdot 5^{n}}{2^{4n}+5^{n+1}}=$__________

6、設函數 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$，試求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$__________

7、若 $a\in R$，$[a]$ 表示不大於 a 的最大整數，試求 $\lim\limits_{x\to 0}x[\dfrac{1}{x}]$ 之值=__________

8、將 $\tan(2x)=\dfrac{1}{2}x$ 的所有正實根由小到大排列，得一無窮數列 x_1，x_2，⋯，x_n，⋯，試求

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=$__________

9、設a,b為兩相異整數，函數$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2-(a+b)x+b}{x-1} & ,x\neq 1\\ abx-5 & ,x=1\end{cases}$，已知$f(x)$在$x=1$處連續，若$a+b$共有$k$個可能之值$t_1,t_2,\cdots\cdots,t_k$，試求$t_1+t_2+\cdots\cdots+t_k=$＿＿＿＿＿＿

10、森森做射擊練習，若他在打靶命中後，下一次打靶再命中的機率為0.8；若此次打靶不命中，下次打靶命中的機率為0.6，若森森第n回打靶命中的機率為P_n，試求$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=$＿＿＿＿＿

三、計算證明題，14分

1、(1) 設實數$p\geq -1$，試證明：$(1+p)^n\geq 1+np$對每一個正整數n都成立　(8分)

(2) 若$(\frac{100}{99})^{\frac{1}{n}}=1+a_n$，試求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$之值　(6分)

背面有題

701-702, 704-715

市立武陵高中 109 學年度第二學期 三年級自然組數學科一段答案卷(110.03.31)

姓名：__________ 座號：________

一、多重選擇題，16 分

【每題 8 分，答錯 1 選項得 5 分，答錯 2 選項得 2 分，答錯 3 選項以上得 0 分】

1	BCD	2	C

三、填充題【共 10 格，每格 7 分，需全對才給分，共 70 分】

1	2	3	4	5
$\left\{y \middle\vert \frac{1}{5} \le y \le \frac{1}{3}, y \in R\right\}$	96	7	$(2\sqrt{2}, 4)$	4
6	**7**	**8**	**9**	**10**
不存在	1	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{3}{4}$

三、計算證明題 14 分，請詳述過程

(1)（8 分）

1. $n=1$ 時 $(1+p)^1 \ge 1+1\cdot p$ 成立　（2 分）
2. 假設 $n=k$ 時 $(1+p)^k \ge 1+kp$　（1 分）

則 $n=k+1$ 時

$$\begin{aligned}(1+p)^{k+1} &= (1+p)(1+p)^k \\ &\ge (1+p)(1+kp) \quad \text{（3 分）} \\ &= 1+(k+1)p+kp^2\end{aligned}$$

又 $1+(k+1)p+kp^2-\left[1+(k+1)p\right]=kp^2 \ge 0$　（2 分）

故 $(1+p)^{k+1} \ge 1+(k+1)p$

由數學歸納法知

$(1+p)^n \ge 1+np$ 對每一個正整數 n 都成立

(2)（6 分）

$(1+a_n)^n = \frac{100}{99} = 1+\frac{1}{99}$，可知 $0<a_n<1$　（2 分）

由(1)知 $1+\frac{1}{99}=(1+a_n)^n \ge 1+na_n$

故 $0<a_n<\frac{1}{99n}$　（2 分）

又 $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{99n}=0$

由夾擠定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$　（2 分）

市立武陵高中 109 學年度 第二學期 三年級自然組數學科一段答案卷(110.03.31)

姓名：__________ 座號：________

一、多重選擇題，16 分

【每題 8 分，答錯 1 選項得 5 分，答錯 2 選項得 2 分，答錯 3 選項以上得 0 分】

1		2	

三、填充題【共 10 格，每格 7 分，需全對才給分，共 70 分】

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

三、計算證明題 14 分，請詳述過程

(1)	(2)