316-320

桃園市立武陵高級中學 109 學年度第二學期高三社會組數學科第一次段考

範圍：選修數乙 1-1~1-2　班級：______　座號：_____　姓名：__________

一、多重選擇題 (每題 8 分，錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個以上不給分)

1. (　　　) 下列無窮數列，何者收斂？

(A)$\left\langle\dfrac{n^2+n+1}{n^2+3}\right\rangle$　(B)$\left\langle\dfrac{2n-5}{3n^2+n+1}\right\rangle$　(C)$\left\langle\dfrac{n^2+999}{3n-1000}\right\rangle$　(D)$\left\langle\left(\dfrac{101}{100}\right)^n\right\rangle$　(E)$\left\langle(-1)^n\right\rangle$

2. (　　　) 下列敘述哪些是正確的？

(A)設數列$\langle a_n\rangle$，$\langle b_n\rangle$為收斂數列，若 $c_n=a_n+b_n$，則$\langle c_n\rangle$為收斂數列。

(B)設數列$\langle a_n\rangle$，$\langle b_n\rangle$為發散數列，若 $c_n=a_n+b_n$，則$\langle c_n\rangle$為發散數列。

(C)設數列$\langle a_n\rangle$為收斂數列，$\langle b_n\rangle$為發散數列，若 $c_n=a_n+b_n$，則$\langle c_n\rangle$為發散數列。

(D)若$\langle a_n^2\rangle$是收斂數列，則$\langle a_n\rangle$亦為收斂數列。

(E)設數列$\langle a_n b_n\rangle$，$\langle b_n\rangle$為收斂數列，則$\langle a_n\rangle$為收斂數列。

二、填充題 (按照下表給分)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
得分	8	16	24	30	36	42	48	54	60	64	68	70

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn+8}{5n-4}=\dfrac{2}{5}$，求實數數對 (a,b)=__________。

2. 設無窮等比級數 $3+3x+3x^2+\ldots+3x^{n-1}+\ldots$之值為 $2x+5$，求實數 x 之值為__________。

3. 設 $a_n=\left(3-\dfrac{1}{n}\right)\left(5+\dfrac{1}{n^2}\right)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$=__________。

背

4. 求數列$\left\langle \dfrac{1+3+5+7+9+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+4+\ldots+n} \right\rangle$的極限為__________。

5. 設數列 $\langle a_n \rangle$，其中 $a_n=\dfrac{n}{2n+3}$，令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，求滿足 $|a_n-\alpha|<\dfrac{1}{10}$ 的最小正整數 n 為______。

6. 求極限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=$_________。

7. 設 $a_n=(1-\dfrac{1}{2})(1-\dfrac{1}{3})\ldots(1-\dfrac{1}{n})$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$_________。

8. 設 x 為實數，已知數列 $\left\langle \dfrac{4^{n+1}}{(x-1)^{n-1}} \right\rangle$ 收斂，則 x 之範圍為________________。

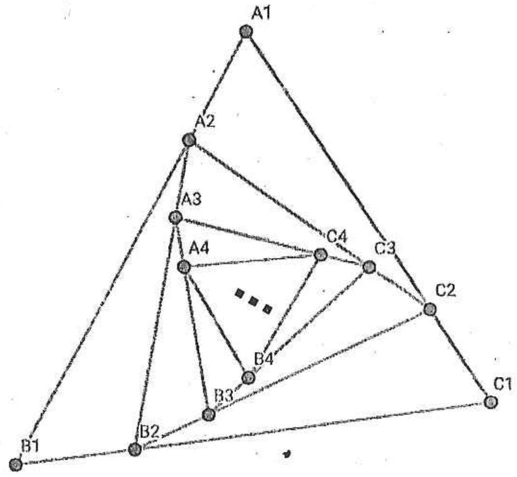
9. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一數列且滿足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4a_n-1}{3a_n+2}=\dfrac{1}{2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$_________。

面有題

10. 設 k 為自然數，已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+2}+4^{n+1}}{3^{n+1}+2\cdot 4^{n+k}}=\dfrac{1}{8}$，試求 k 之值為＿＿＿＿＿＿。

11. 對於數列 $\langle a_n\rangle$，已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(3n-5)a_n=7$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(8n+15)a_n=$＿＿＿＿＿。

12. $\triangle A_1B_1C_1$中，設$\overline{A_1B_1}=5$，$\overline{B_1C_1}=6$，$\overline{C_1A_1}=7$，依序在$\overline{A_1B_1}$、$\overline{B_1C_1}$、$\overline{C_1A_1}$上取A_2、B_2、C_2使得 $\overline{A_1A_2}:\overline{A_2B_1}=\overline{B_1B_2}:\overline{B_2C_1}=\overline{C_1C_2}:\overline{C_2A_1}=1:3$，並連接$A_2$、$B_2$、$C_2$形成一$\triangle A_2B_2C_2$，接著按照此規律不斷依序找點$A_k$、$B_k$、$C_k$使得$\overline{A_{k-1}A_k}:\overline{A_kB_{k-1}}=\overline{B_{k-1}B_k}:\overline{B_kC_{k-1}}=\overline{C_{k-1}C_k}:\overline{C_kA_{k-1}}=1:3$，並作出$\triangle A_kB_kC_k$，如下圖所示。若不斷依此規律繼續下去，設$\triangle A_kB_kC_k$的面積為$S_k$，試求$\sum\limits_{k=1}^{\infty}S_k=$＿＿＿＿＿＿。



三、計算證明題 (共 14 分) 需有詳細計算證明過程

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\right)$之值。**(6 分)**

2. 設數列$\langle a_n\rangle=\langle 2^n\rangle$，$\langle b_n\rangle=\langle 8n\rangle$，

   (1) 若已知在某項之後，恆有 $a_n>b_n$，試猜測滿足上述性質的最小正整數 n。**(2 分)**

   (2) 以數學歸納法證明你的猜測。**(6 分)**

背面有題

216-320

桃園市立武陵高級中學 109 學年度第二學期高三社會組數學科第一次段考

範圍：選修數乙 1-1~1-2　班級：______　座號：_____　姓名：_________

一、多重選擇題(每題 8 分，錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個以上得 0 分)

1	2
AB	AC

二、填充題(按照下表給分)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
得分	8	16	24	30	36	42	48	54	60	64	68	70

1	2	3	4
(0,2)	$\frac{1}{2}$	15	2
5	**6**	**7**	**8**
7	$\frac{1}{2}$	0	$x\geq 5$ 或 $x<-3$
9	**10**	**11**	**12**
$\frac{4}{5}$	2	$\frac{56}{3}$	$\frac{32}{3}\sqrt{6}$

三、計算證明題 (無計算過程不予計分，共 14 分)

1

$\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\leq$ 所求 $\leq$

$\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}$，(1 分)

$\Rightarrow\ \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}}\leq$ 所求 $\leq\frac{n}{\sqrt{4n^2+1}}$(1 分)

因為 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$(1 分)

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}$(1 分)

故由夾擠定理知 (1 分)

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\right)=\frac{1}{2}$(1 分)

2

(1) 代數字可知當 $n\geq 6$ 時 $a_n>b_n$　(2 分)

(2) 當 $n=6$ 時，$a_6=64$，$b_6=48$，$a_6>b_6$ (1 分)

設當 $n=k$ 時 $(k\geq 6)$ 猜測正確，即 $2^k>8k$ (2 分)

則當 $n=k+1$ 時

$a_{k+1}-b_{k+1}=2^{k+1}-8(k+1)$

$>2\cdot 8k-8k-8=8k-8=8(k-1)>0$　(2 分)

故由數學歸納法知，猜對了！(1 分)