

武陵高中 114 學年度第一學期高三選修數學甲期末考考試試卷
範圍：選修數學甲(上)第三章積分 班級：302,304-316 座號： 姓名：

選填題：第 A 題至第 D 題，每題 5 分，每題皆需化至最簡且須全部答對才給分。

A. 已知 $y = f(x)$ 為實係數多項式函數，且 $\int_0^4 f(x) dx = 3$ 、 $\int_0^2 f(x) dx = 2$ 、 $\int_4^8 f(x) dx = -1$ 。

則 $\int_2^8 f(x) dx = \text{【①】}$

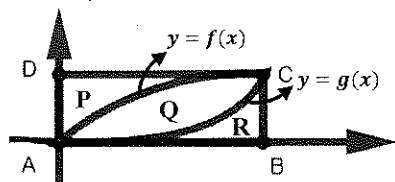
B. 求定積分 $\int_{-2}^2 x dx = \text{【②】}$

C. 求定積分 $\int_0^2 \sqrt{16-x^2} dx = \left[\frac{\text{③}}{\text{④}} \pi + \text{⑤} \sqrt{\text{⑥}} \right]$

D. 求 $y = x^2$ 的圖形在 $[1,3]$ 與 x 軸所圍成的區域繞 x 軸旋轉的旋轉體體積 = $\left[\frac{\text{⑦} \text{⑧} \text{⑨}}{\text{⑩}} \pi \right]$

多選題：第 11 題至第 18 題，每題 10 分，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，每個選項答對得 2 分。

11. 坐標平面上四點 $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(3,1)$, $D(0,1)$ 。 $y = f(x)$ 與 $\overline{DC}$ 、 $\overline{DA}$ 所圍的區域為 P 、
 $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 所圍的區域為 Q 、 $y = g(x)$ 與 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 所圍的區域為 R ，如下圖所示。
設 P , Q 及 R 三塊區域的面積分別為 p , q 及 r ，選出正確的選項：



- (1) $p = 1 - \int_0^3 f(x) dx$ (2) $r = \int_0^3 g(x) dx$ (3) $q + r = \int_0^3 f(x) dx$
(4) $p = \int_0^3 (1 - f(x)) dx$ (5) $q = \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx$

12. 在 $[0,3]$ 之間， $f(x) = x^3$ 與 x 軸、 $x = 3$ 所圍的區域面積為 R ，而若將 $[0,3]$ 分成 n 等分，其上和的值為 U_n 、下和的值為 L_n 。則以下敘述哪些正確？

(1) $U_n = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{3n} \left(\frac{k}{n}\right)^3$ (2) $L_n = \left[\frac{9(n-1)}{2n}\right]^2$ (3) $U_{114} = L_{115}$
(4) $\frac{U_{114} + L_{114}}{2} = R$ (5) $\frac{U_{114}}{3} = \frac{27}{4}$

13. 設 $L_1: y = m_1x + k_1$ 、 $L_2: y = m_2x + k_2$ (其中 $m_1 > m_2$) 為函數 $\Gamma: y = x^2 + x + h$ 的兩條切線， L_1 與 Γ 相切於 A 點、 L_2 為函數 Γ 相切於 B 點，而且 L_1 與 L_2 垂直並交於 $O(0,0)$ 。則以下敘述哪些正確？

- (1) $h = 1$
(2) A 點座標為 $(\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$
(3) B 點座標為 $(-\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$
(4) L_1 直線方程式為 $y = (1 + \sqrt{2})x$
(5) L_1 、 L_2 與 Γ 所圍成的封閉面積 $= \frac{\sqrt{2}}{6}$

14. 設 $f(x) = x^2 + bx + c$ 、 $F(x) = \int f(x) dx$ ，其中 b, c 為實數。已知當 $-3 \leq x \leq 2$ 時， $f(x)$ 的最大值會是最小值的 5 倍，且 $f(1+x) = f(1-x)$ 對任意實數 x 均成立，則以下敘述哪些正確？

- (1) $b = -2$
(2) $c = 4$
(3) $y = F(x)$ 有極值
(4) 對任意實數 t 均滿足 $\int_0^t f(x) dx = \int_{2-t}^2 f(x) dx$
(5) $(1, F(1))$ 為 $y = F(x)$ 的反曲點

15. 已知 xy 平面上有一圓 $C: x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$ 及直線 $L: y = m(x + 6) - 5$ ，而直線 L 與圓 C 分別交於 P 、 Q 相異兩點，且所切成的兩個弓形面積分別為 A_1 、 A_2 ($A_1 > A_2$)，則以下敘述哪些正確？

- (1) 若 P 點位於 y 軸，則 $m = \frac{4}{3}$ or $\frac{1}{3}$
- (2) 若 P 點位於 y 軸，則 Q 點為 $(9, 0)$
- (3) 若 P 、 Q 位於同一個象限，則 $0 < m < \frac{1}{3}$
- (4) 若 P 、 Q 位於同一個象限，則 $A_1 > \int_0^9 (\sqrt{-x^2 + 8x + 9} - \frac{1}{3}x + 3) dx$
- (5) 若 P 、 Q 位於同一個象限，則 $A_2 < \int_0^9 (\frac{1}{3}x - 3 + \sqrt{-x^2 + 8x + 9}) dx$

16. 已知 $f(x) = 4 \sin x - 3 \cos x$ ，方程式 $f(x) = 0$ 在 $[-5\pi, 5\pi]$ 區間中有 n 個解，這 n 個解由小到大形成數列 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ，則以下敘述哪些正確？

- (1) $n = 9$
- (2) $\cos(x_1) = \frac{4}{5}$
- (3) $x_2 - x_1 = \pi$
- (4) $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx$
- (5) $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$

17. 設 $f(x) = 3x^2 + bx + c$ 、 $F(x) = \int_2^x f(t) dt$ 。已知 $y = f(x)$ 通過 $(2, 0)$ 且與 x 軸相切，而 $(F(x))^2$ 除以 $p(x)$ 的商式為 $f(x)$ 、餘式為 $F(x)$ ，則以下敘述哪些正確？

- (1) $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 處的切線斜率為 -4
- (2) $y = f(x)$ 與 y 軸交於 $(0, 12)$
- (3) $\deg(p(x)) = 4$
- (4) $p(x) \leq 0$ 的解範圍為 $[2, 3]$
- (5) $\int_{-2}^0 p(x) < 0$

18. 籤筒中有 1,2,3,4,5 號籤各一支，每支籤被抽到的機率都一樣。今天隨機抽出一支籤，所出現的號碼為 k 號，設三次函數為 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-k)$ ，而 $y = f(x)$ 與 x 軸所圍成的封閉面積為 A ， $\int_1^3 f(x) dx = B$ ，則以下敘述哪些正確？

- (1) $y = f(x)$ 與 x 軸相切的機率為 $\frac{1}{5}$
- (2) $y = f(x)$ 的反曲點為 (s, t) ，而且 $1 \leq s \leq 2$ 的機率為 $\frac{2}{5}$
- (3) 「 $A = \int_1^2 [(x-1)^2(x-2)] dx$ 」的機率為 $\frac{1}{5}$
- (4) 「 $B > 0$ 」的機率為 $\frac{2}{5}$
- (5) B 的期望值 $= 0$