



### ► 回憶一下

1. 和的平方： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ 。
2. 差的平方： $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$ 。
3. 平方差： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 。

### ✦ 基礎練習題

1. 試利用差的平方公式： $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ，計算  $0.99^2 = \underline{0.9801}$ 。

答  $0.99^2 = (1 - 0.01)^2$   
 $= 1^2 - 2 \times 1 \times 0.01 + 0.01^2$   
 $= 1 - 0.02 + 0.0001$   
 $= 0.9801$ 。

2. 已知兩正方形，其邊長分別為 113 公分與 13 公分，試利用平方差公式：

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ，計算兩正方形面積相差 12600 平方公分。

答 大正方形面積  $= 113^2$ ，  
 小正方形面積  $= 13^2$ ，  
 兩正方形面積差  $= 113^2 - 13^2$   
 $= (113 + 13)(113 - 13)$   
 $= 126 \times 100 = 12600$ 。



3. 已知  $a > b$ ，且  $a + b = 12$ ， $ab = 7$ ，試回答下列問題：

(1)  $a^2 + b^2 = \underline{130}$ 。

(2)  $a - b = \underline{2\sqrt{29}}$ 。

(3)  $a^2 - b^2 = \underline{24\sqrt{29}}$ 。

【答】

$$\begin{aligned} (1) a^2 + b^2 &= (a + b)^2 - 2ab \\ &= 12^2 - 2 \times 7 \\ &= 144 - 14 \\ &= 130。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ &= 130 - 2 \times 7 \\ &= 116。 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a - b = \pm \sqrt{116} = \pm 2\sqrt{29} \quad (\because a > b \therefore \text{取正})。$$

$$\begin{aligned} (3) a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \\ &= 12 \times 2\sqrt{29} \\ &= 24\sqrt{29}。 \end{aligned}$$

4. 求  $\frac{1987^2 - 2 \times 1987 \times 7 + 7^2}{1980^2} \times \frac{1994}{1987^2 - 7^2} = \underline{\frac{1}{1980}}$ 。

【答】

$$\begin{aligned} &\frac{1987^2 - 2 \times 1987 \times 7 + 7^2}{1980^2} \times \frac{1994}{1987^2 - 7^2} \\ &= \frac{(1987 - 7)^2}{1980^2} \times \frac{1994}{(1987 + 7)(1987 - 7)} \\ &= \frac{1980^2}{1980^2} \times \frac{1994}{1994 \times 1980} \\ &= 1 \times \frac{1}{1980} \\ &= \frac{1}{1980}。 \end{aligned}$$

5. 若  $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \times \cdots \times (2^{256} + 1) = 2^n - 1$ ，則  $n = \underline{512}$ 。

【答】

$$\begin{aligned} &(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \times \cdots \times (2^{256} + 1) \\ &= (2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \times \cdots \times (2^{256} + 1) \\ &= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \times \cdots \times (2^{256} + 1) \\ &= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \times \cdots \times (2^{256} + 1) \\ &= (2^8 - 1)(2^8 + 1) \times \cdots \times (2^{256} + 1) \\ &\vdots \\ &= 2^{512} - 1。 \\ &\Rightarrow n = 512。 \end{aligned}$$



## 銜接高中內容

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)。$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)。$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)。$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)^3 + 3ab(a-b)。$

## 進階練習題

1. 試利用  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ,

展開  $(2x-3)^3 = \underline{8x^3 - 36x^2 + 54x - 27}。$

**答**  $(2x-3)^3 = (2x)^3 - 3 \times (2x)^2 \times 3 + 3 \times (2x) \times 3^2 - 3^3$   
 $= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27。$

2. 試利用  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ ,

因式分解  $8x^3 + 27y^3 = \underline{(2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)}。$

**答**  $8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3$   
 $= (2x+3y)[(2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2]$   
 $= (2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)。$

3. 已知  $x + \frac{1}{x} = 5$ , 試求下列各值:

(1)  $x^2 + \frac{1}{x^2} = \underline{23}。$  (提示: 將  $x + \frac{1}{x} = 5$  兩邊平方)

(2)  $x^3 + \frac{1}{x^3} = \underline{110}。$

(提示: 利用  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$  計算之)

**答** (1)  $(x + \frac{1}{x})^2 = 25,$

$$x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 25$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 25 - 2 \times x \times \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 25 - 2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 23。$$

(2)  $x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})(x^2 - x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$

$$= 5 \times (23 - 1)$$

$$= 5 \times 22 = 110。$$



4. 因式分解下列各式：

$$(1) (a+b)^2 - c^2 = \underline{(a+b+c)(a+b-c)}。$$

$$(2) 16x^4 - 625 = \underline{(4x^2+25)(2x+5)(2x-5)}。$$

$$(3) x^6 - 1 = \underline{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)}。$$

**答**

$$(1) (a+b)^2 - c^2 = [(a+b)+c][(a+b)-c] \\ = (a+b+c)(a+b-c)。$$

$$(2) 16x^4 - 625 = (4x^2)^2 - 25^2 \\ = (4x^2+25)(4x^2-25) \\ = (4x^2+25)[(2x)^2-5^2] \\ = (4x^2+25)(2x+5)(2x-5)。$$

$$(3) x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2 \\ = (x^3-1)(x^3+1) \\ = (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1) \\ = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)。$$

5. 展開並化簡下列各式：

$$(1) (3-2\sqrt{2})^3 = \underline{99-70\sqrt{2}}。$$

$$(2) (2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2) - (3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2) = \underline{-19x^3-35y^3}。$$

**答**

$$(1) (3-2\sqrt{2})^3 = 3^3 - 3 \times 3^2 \times 2\sqrt{2} + 3 \times 3 \times (2\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^3 \\ = 27 - 54\sqrt{2} + 72 - 16\sqrt{2} \\ = 99 - 70\sqrt{2}。$$

$$(2) (2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2) - (3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2) \\ = [(2x)^3 - (3y)^3] - [(3x)^3 + (2y)^3] \\ = (8x^3 - 27y^3) - (27x^3 + 8y^3) \\ = -19x^3 - 35y^3。$$



# 2 因式分解



## ► 回憶一下

### 1. 因式分解：

將一個多項式  $f(x)$  分解成數個多項式  $g_1(x), \dots, g_n(x)$  的乘積，

即  $f(x) = g_1(x) \times \dots \times g_n(x)$ 。

例如： $2x^2 - 5x + 2 = (2x - 1)(x - 2)$ 。

$\xrightarrow{\text{因式分解}}$   
 $\xleftarrow{\text{展開}}$

### 2. 承 1.，其中 $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ 為 $f(x)$ 之因式。

## ✦ 基礎練習題

### 1. 利用提公因式法因式分解：

(1)  $(x+3)(3x+7) + (x+3) = \underline{(x+3)(3x+8)}$ 。

(2)  $(2x+1)(2x+3) - (3x-4)(2x+3) = \underline{-(2x+3)(x-5)}$ 。

(3)  $(x-3)^2 + (2x+1)(3-x) = \underline{-(x-3)(x+4)}$ 。

答

$$\begin{aligned}
 (1) & (x+3)(3x+7) + (x+3) \\
 &= (x+3)[(3x+7)+1] \\
 &= (x+3)(3x+7+1) \\
 &= (x+3)(3x+8)^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & (2x+1)(2x+3) - (3x-4)(2x+3) \\
 &= (2x+3)[(2x+1)-(3x-4)] \\
 &= (2x+3)(2x+1-3x+4) \\
 &= (2x+3)(-x+5) \\
 &= (2x+3)[-(x-5)] \\
 &= -(2x+3)(x-5)^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & (x-3)^2 + (2x+1)(3-x) \\
 &= (x-3)^2 + (2x+1)[-(x-3)] \\
 &= (x-3)^2 - (2x+1)(x-3) \\
 &= (x-3)[(x-3)-(2x+1)] \\
 &= (x-3)(x-3-2x-1) \\
 &= (x-3)(-x-4) \\
 &= (x-3)[-(x+4)] \\
 &= -(x-3)(x+4)^\circ
 \end{aligned}$$



## 2. 利用乘法公式因式分解：

$$(1) x^2 - 64 = \underline{(x+8)(x-8)}。 \quad (\text{提示：} a^2 - b^2 = (a+b)(a-b))$$

$$(2) x^2 - 8x + 16 = \underline{(x-4)^2}。 \quad (\text{提示：} a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2)$$

$$(3) (2x+3)^2 + 6(2x+3) + 9 = \underline{4(x+3)^2}。$$

答

$$(1) x^2 - 64$$

$$= x^2 - 8^2$$

$$= (x+8)(x-8)。$$

$$(2) x^2 - 8x + 16$$

$$= x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2$$

$$= (x-4)^2。$$

$$(3) (2x+3)^2 + 6(2x+3) + 9$$

$$= (2x+3)^2 + 2 \times (2x+3) \times 3 + 3^2$$

$$= [(2x+3) + 3]^2$$

$$= (2x+6)^2$$

$$= [2(x+3)]^2$$

$$= 4(x+3)^2。$$

## 3. 利用十字交乘法因式分解：

$$(1) 5x^2 + 8x + 3 = \underline{(5x+3)(x+1)}。$$

$$(2) 21x^2 + 22x - 8 = \underline{(7x-2)(3x+4)}。$$

$$(3) (2x+1)^2 - 3(2x+1) - 28 = \underline{2(x-3)(2x+5)}。$$

答

$$(1) 5x^2 + 8x + 3$$

$$\begin{array}{r} 5x \quad +3 \\ x \quad +1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x \quad + \quad 3x = 8x \\ \hline \end{array}$$

$$= (5x+3)(x+1)。$$

$$(2) 21x^2 + 22x - 8$$

$$\begin{array}{r} 7x \quad -2 \\ 3x \quad +4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28x \quad - \quad 6x = 22x \\ \hline \end{array}$$

$$= (7x-2)(3x+4)。$$

$$(3) \text{ 令 } A = (2x+1)，$$

$$(2x+1)^2 - 3(2x+1) - 28$$

$$= A^2 - 3A - 28$$

$$\begin{array}{r} A \quad -7 \\ A \quad +4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4A \quad - \quad 7A = -3A \\ \hline \end{array}$$

$$= (A-7)(A+4)$$

$$= [(2x+1)-7][(2x+1)+4]$$

$$= (2x-6)(2x+5)$$

$$= [2(x-3)](2x+5) = 2(x-3)(2x+5)。$$



4. 因式分解下列各式：

$$(1) x^2 - 6x - ax + 6a = \underline{(x-6)(x-a)}。$$

$$(2) x^2 - y^2 - 2x + 1 = \underline{(x+y-1)(x-y-1)}。$$

$$(3) 6(x+y)^2 - 5(x^2 - y^2) - (x-y)^2 = \underline{2y(7x+5y)}。$$

【答】

$$\begin{aligned} (1) & x^2 - 6x - ax + 6a \\ &= (x^2 - 6x) - (ax - 6a) \\ &= x(x-6) - a(x-6) \\ &= (x-6)(x-a)。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & x^2 - y^2 - 2x + 1 \\ &= (x^2 - 2x + 1) - y^2 \\ &= (x-1)^2 - y^2 \\ &= (x-1+y)(x-1-y) \\ &= (x+y-1)(x-y-1)。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) & \text{ 令 } A=x+y, B=x-y, \\ & 6(x+y)^2 - 5(x^2 - y^2) - (x-y)^2 \\ &= 6A^2 - 5AB - B^2 \\ & \quad \begin{array}{r} 6A \quad +B \\ A \quad -B \\ \hline -6AB + AB = -5AB \end{array} \\ &= (6A+B)(A-B) \\ &= [6(x+y)+(x-y)][(x+y)-(x-y)] \\ &= (7x+5y)(2y) \\ &= 2y(7x+5y)。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \text{ 因式分解 } & (3x+2)(-x^6+3x^5) + (3x+2)(-2x^6+x^5) + (x+1)(3x^6-4x^5) \\ &= \underline{-x^5(3x-4)(2x+1)}。 \end{aligned}$$

【103 會考】

【答】

$$\begin{aligned} & (3x+2)(-x^6+3x^5) + (3x+2)(-2x^6+x^5) + (x+1)(3x^6-4x^5) \\ &= (3x+2)[(-x^6+3x^5)+(-2x^6+x^5)] + (x+1)(3x^6-4x^5) \\ &= (3x+2)[(-x^6+3x^5-2x^6+x^5)] + (x+1)(3x^6-4x^5) \\ &= (3x+2)(-3x^6+4x^5) + (x+1)(3x^6-4x^5) \\ &= (3x+2)[-(3x^6-4x^5)] + (x+1)(3x^6-4x^5) \\ &= -(3x+2)(3x^6-4x^5) + (x+1)(3x^6-4x^5) \\ &= (3x^6-4x^5)[-(3x+2)+(x+1)] \\ &= x^5(3x-4)(-3x-2+x+1) \\ &= x^5(3x-4)(-2x-1) \\ &= -x^5(3x-4)(2x+1)。 \end{aligned}$$



## 銜接高中內容

1. 給定  $f(x)$ 、 $g(x)$  與  $q(x)$  三多項式且為非零多項式。若  $f(x)=g(x)q(x)$ ，此時  $g(x)$  與  $q(x)$  稱為  $f(x)$  的因式， $f(x)$  為  $g(x)$  與  $q(x)$  的倍式。

2. 因式定理：

若  $ax+b$  ( $a \neq 0$ ) 為非零多項式  $f(x)$  之因式，則  $f(-\frac{b}{a})=0$ 。

## 進階練習題

1. 因式分解下列各式：

$$(1) 8x^3 - 27 = \underline{(2x-3)(4x^2+6x+9)}。$$

$$(2) (x^2+2)(x^4-2x^2+4) - (x^2+2)(x^4+2x^2+4) = \underline{-4x^2(x^2+2)}。$$

答

$$(1) 8x^3 - 27$$

$$= (2x)^3 - 3^3$$

$$= (2x-3)[(2x)^2 + (2x) \cdot 3 + 3^2]$$

$$= (2x-3)(4x^2+6x+9)。$$

$$(2) (x^2+2)(x^4-2x^2+4) - (x^2+2)(x^4+2x^2+4)$$

$$= (x^2+2)[(x^4-2x^2+4) - (x^4+2x^2+4)]$$

$$= (x^2+2)[x^4-2x^2+4-x^4-2x^2-4]$$

$$= (x^2+2)(-4x^2)$$

$$= -4x^2(x^2+2)。$$

2. 因式分解下列各式：

$$(1) x^4 - 10x^2 + 9 = \underline{(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)}。$$

$$(2) (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 63 = \underline{(x^2+5x+13)(x^2+5x-3)}。$$

答

$$(1) x^4 - 10x^2 + 9$$

$$\begin{array}{r} x^2 \quad \times \quad -9 \\ x^2 \quad \times \quad -1 \\ \hline -x^2 - 9x^2 = -10x^2 \end{array}$$

$$= (x^2-9)(x^2-1)$$

$$= (x+3)(x-3)(x+1)(x-1)。$$

$$(2) (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 63 = (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) - 63$$

$$= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) - 63。$$

$$\text{令 } A = x^2 + 5x,$$

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6) - 63 = (A+4)(A+6) - 63$$

$$= A^2 + 10A + 24 - 63$$

$$= A^2 + 10A - 39$$

$$= (A+13)(A-3)$$

$$= (x^2+5x+13)(x^2+5x-3)。$$

$$\begin{array}{r} A \quad \times \quad +13 \\ A \quad \times \quad -3 \\ \hline -3A + 13A = 10A \end{array}$$



3. 因式分解下列各式：

$$(1) x^4 + 7x^2 + 16 = \underline{(x^2 + x + 4)(x^2 - x + 4)}。$$

$$(2) x^4 + 64 = \underline{(x^2 + 4x + 8)(x^2 - 4x + 8)}。$$

**答**

$$\begin{aligned} (1) x^4 + 7x^2 + 16 &= (x^4 + 8x^2 + 16) - x^2 \\ &= (x^2 + 4)^2 - x^2 \\ &= [(x^2 + 4) + x][(x^2 + 4) - x] \\ &= (x^2 + x + 4)(x^2 - x + 4)。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) x^4 + 64 &= (x^4 + 16x^2 + 64) - 16x^2 \\ &= (x^2 + 8)^2 - (4x)^2 \\ &= [(x^2 + 8) + 4x][(x^2 + 8) - 4x] \\ &= (x^2 + 4x + 8)(x^2 - 4x + 8)。 \end{aligned}$$

4. 已知  $2x+3$  為  $8x^2+ax+9$  的因式，求  $a = \underline{18}$ 。

**答**

〈方法 1〉

$$\begin{array}{r} 4x+3 \\ 2x+3 \overline{) 8x^2+ax+9} \\ \underline{8x^2+12x} \phantom{9} \\ (a-12)x+9 \\ \underline{6x+9} \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow a-12=6。$$

$$\therefore a=18$$

〈方法 2〉

$$\text{令 } f(x) = 8x^2 + ax + 9，$$

$$\text{根據因式定理，} f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0，$$

$$8\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{3}{2}\right) + 9 = 0$$

$$\Rightarrow a = 18。$$

5. 設  $a$ 、 $b$  為實數，若  $x^4 - 3ax^2 + bx + 4$  之其中兩因式為  $2x+2$  與  $x-2$ ，

$$\text{求 } a+b = \underline{\frac{5}{3}}。$$

**答**

令  $f(x) = x^4 - 3ax^2 + bx + 4$ ，根據因式定理可知：

$$\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-3a-b+4=0 \\ 16-12a+2b+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+b=5 \\ 6a-b=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{5}{3} \\ b=0 \end{cases}。$$

$$\therefore a+b = \frac{5}{3}$$





### ▶ 回憶一下

1. 設  $m$ 、 $n$  為整數， $a$ 、 $b$  為實數且  $ab \neq 0$ ，則：

(1)  $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 。

(2)  $(a^m)^n = a^{m \times n}$ 。

(3)  $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ 。

(4)  $a^0 = 1$ 。

註  $0^0$  無意義。

2. 科學記號：將一正數表示成  $a \times 10^n$  形式，其中  $1 \leq a < 10$ ， $n$  為整數。

### ★ 基礎練習題

1. 試求下列各值：

(1)  $-3^4 - 7^2 - \frac{2^6}{(-2)^4} = \underline{-134}$ 。

(2)  $-4^3 + (-5)^0 + (-2)^4 = \underline{-47}$ 。

答 (1)  $-3^4 - 7^2 - \frac{2^6}{(-2)^4} = -81 - 49 - \frac{64}{16} = -134$ 。

(2)  $-4^3 + (-5)^0 + (-2)^4 = -64 + 1 + 16 = -47$ 。

2. 試求下列各值：

(1)  $(-3)^3 \times (-3)^2 = \underline{-243}$ 。

(2)  $(2^2)^3 = \underline{64}$ 。

(3)  $(\frac{-2}{3})^4 \times (\frac{3}{4})^4 = \underline{\frac{1}{16}}$ 。

答 (1)  $(-3)^3 \times (-3)^2 = (-3)^5 = -243$ 。

(2)  $(2^2)^3 = 2^6 = 64$ 。

(3)  $(\frac{-2}{3})^4 \times (\frac{3}{4})^4 = (-\frac{2}{3} \times \frac{3}{4})^4 = (-\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$ 。



3. 將下列各數以科學記號表示之：

(1)  $0.0000123 = \underline{1.23 \times 10^{-5}}$ 。

(2)  $12300000 = \underline{1.23 \times 10^7}$ 。

(3)  $12300 \times 10^{-16} = \underline{1.23 \times 10^{-12}}$ 。

【答】

(1)  $0.0000123 = 1.23 \times 10^{-5}$ 。

(2)  $12300000 = 1.23 \times 10^7$ 。

(3)  $12300 \times 10^{-16} = 1.23 \times 10^4 \times 10^{-16}$   
 $= 1.23 \times 10^{-12}$ 。

4. 若  $a = 6.7 \times 10^{-7}$ ， $b = 4.5 \times 10^{-8}$ ，則：

(1)  $a + b = \underline{7.15 \times 10^{-7}}$ 。

(2)  $a - b = \underline{6.25 \times 10^{-7}}$ 。

【答】

(1)  $a + b = 6.7 \times 10^{-7} + 4.5 \times 10^{-8}$   
 $= 6.7 \times 10^{-7} + 0.45 \times 10^{-7}$   
 $= (6.7 + 0.45) \times 10^{-7}$   
 $= 7.15 \times 10^{-7}$ 。

(2)  $a - b = 6.7 \times 10^{-7} - 4.5 \times 10^{-8}$   
 $= 6.7 \times 10^{-7} - 0.45 \times 10^{-7}$   
 $= (6.7 - 0.45) \times 10^{-7}$   
 $= 6.25 \times 10^{-7}$ 。

5. 若  $a = 2.6 \times 10^9$ ， $b = 2 \times 10^4$ ，則：

(1)  $a \times b = \underline{5.2 \times 10^{13}}$ 。

(2)  $a \div b = \underline{1.3 \times 10^5}$ 。

【答】

(1)  $a \times b = (2.6 \times 10^9) \times (2 \times 10^4)$   
 $= 2.6 \times 2 \times 10^9 \times 10^4$   
 $= 5.2 \times 10^{13}$ 。

(2)  $a \div b = (2.6 \times 10^9) \div (2 \times 10^4)$   
 $= \frac{2.6}{2} \times \frac{10^9}{10^4}$   
 $= 1.3 \times 10^5$ 。

6. 小明在網路上搜尋水資源的資料如下：「地球上水的總儲量為  $1.36 \times 10^{18} \text{ m}^3$ ，其中可供人類使用的淡水只占全部的 0.3%。」根據他搜尋到的資料，判斷可供人類使用的淡水有  $\underline{4.08 \times 10^{15} \text{ m}^3}$ 。

【103 會考】

【答】

$1.36 \times 10^{18} \times 0.3\% = 1.36 \times 10^{18} \times 0.003$   
 $= 1.36 \times 10^{18} \times 3 \times 10^{-3}$   
 $= 4.08 \times 10^{15}$ 。



## 銜接高中內容

1. 設  $a$  為實數， $a > 0$ 。

若  $m$  為整數， $n$  為大於 1 之正整數，則：

$$(1) a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}。$$

$$(2) a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}。$$

2. 設  $m$ 、 $n$ 、 $a$ 、 $b$  均為實數，且  $a > 0$ ， $b > 0$ ，則：

$$(1) a^m \times a^n = a^{m+n}。$$

$$(2) (a^m)^n = a^{m \times n}。$$

$$(3) (a \times b)^n = a^n \times b^n。$$

$$(4) a^0 = 1。$$

## 進階練習題

1. 試求下列各值：

$$(1) 3^{\frac{1}{2}}。 \quad (2) 2^{-\frac{1}{3}}。 \quad (3) 3^{\frac{2}{3}}。 \quad (4) 3^{\frac{3}{2}}。$$

答

$$(1) 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}。$$

$$(2) 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}。$$

$$(3) 3^{\frac{2}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}。$$

$$(4) 3^{\frac{3}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}。$$

2. 試求下列各值：

$$(1) \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}。 \quad (2) \frac{5^{-0.3} \times 5^{-2.9}}{5^{-0.2}}。$$

答

$$(1) \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}。$$

$$(2) \frac{5^{-0.3} \times 5^{-2.9}}{5^{-0.2}} = \frac{5^{-3.2}}{5^{-0.2}} = 5^{-3} = \frac{1}{125}。$$



3. (1) 已知  $a^{\frac{3}{2}}=27$ ，求  $a=$  9。

(2) 已知  $8^b=729$ ，求  $4^{-b}=$   $\frac{1}{81}$ 。

**答**

(1)  $a^{\frac{3}{2}}=27$ ，兩邊同時取  $\frac{2}{3}$  次方，

$$(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}=27^{\frac{2}{3}},$$

$$a=27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^2=9。$$

(2)  $8^b=729 \Rightarrow (2^3)^b=729 \Rightarrow 2^{3b}=3^6$ ，兩邊同時  $-\frac{2}{3}$  次方，

$$\Rightarrow (2^{3b})^{-\frac{2}{3}}=(3^6)^{-\frac{2}{3}}, 2^{-2b}=3^{-4}, (2^2)^{-b}=\frac{1}{81}, 4^{-b}=\frac{1}{81}。$$

4. 若  $a$  為實數，且  $a>0$ ，且已知  $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=10$ ，試求下列之值：

(1)  $a+a^{-1}=$  98。

(2)  $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=$  970。

(3)  $a^2+a^{-2}=$  9602。

**答**

(1)  $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=10$ ，兩邊平方，

$$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=100，$$

$$(a^{\frac{1}{2}})^2+2\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{1}{2}}+(a^{-\frac{1}{2}})^2=100，$$

$$a+2+a^{-1}=100。 \therefore a+a^{-1}=98$$

(2)  $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}})^3+(a^{-\frac{1}{2}})^3=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})[(a^{\frac{1}{2}})^2-a^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{1}{2}}+(a^{-\frac{1}{2}})^2]$   
 $=10\times(a-1+a^{-1})=10\times(98-1)=970。$

(3)  $a^2+a^{-2}=(a^1+a^{-1})^2-2\times a^1\times a^{-1}=98^2-2=9604-2=9602。$

5. 試求下列各式之值：

(1)  $(0.729)^{-\frac{2}{3}}(\frac{81}{25})^{\frac{1}{2}}(\frac{3}{5})^2=$   $\frac{4}{5}$ 。

(2)  $(4+\sqrt{7})^{\frac{3}{2}}(4-\sqrt{7})^{\frac{3}{2}}=$  27。

(3)  $\sqrt{\sqrt{8}} \cdot \sqrt[8]{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{64}}=$   $\frac{1}{2}$ 。

**答**

(1) 原式  $= (0.9^3)^{-\frac{2}{3}} [(\frac{9}{5})^2]^{\frac{1}{2}} (\frac{3}{5})^2 = 0.9^{-2} (\frac{9}{5}) (\frac{3}{5})^2 = (\frac{10}{3^2})^2 (\frac{3^2}{5}) (\frac{3^2}{5^2})$   
 $= \frac{10^2 \times 3^4}{3^4 \times 5^3} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}。$

(2) 原式  $= [(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})]^{\frac{3}{2}} = (4^2 - \sqrt{7}^2)^{\frac{3}{2}} = (16-7)^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{3}{2}} = 27。$

(3) 原式  $= [(2^3)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} (2^2)^{\frac{1}{8}} (2^6)^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{-2} = 2^{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 2} = 2^{-1} = \frac{1}{2}。$



# 4 多項式的四則運算



## ► 回憶一下

1. 由數字和文字（如  $x$ 、 $y$ 、 $\dots$ ）進行加法與乘法運算所組成的式子，稱為多項式。

**註** 文字符號不可出現在分母、絕對值、指數、根號中。

2. 多項式的加減運算：同類項合併。

$$\begin{aligned}\text{例如：} & (4x^2 + 5x - 2) + (-3x^2 - 3) \\ &= (4x^2 - 3x^2) + (5x) + (-2 - 3) \\ &= x^2 + 5x - 5.\end{aligned}$$

**註** 一般而言，沒特別說明習慣以降冪排列之。

3. 多項式的乘法運算：分配律乘開，再同類項合併。

$$\begin{aligned}\text{例如：} & (3x - 2)(2x + 5) \\ &= 6x^2 + 15x - 4x - 10 \\ &= 6x^2 + (15x - 4x) - 10 \\ &= 6x^2 + 11x - 10.\end{aligned}$$

## 基礎練習題

1. 已知  $A = x^2 + 3x - 2$ ， $B = -3x^2 - 5x$ ，試化簡下列各式：

(1)  $3A + B = \underline{4x - 6}$ 。

(2)  $A \times B = \underline{-3x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 10x}$ 。

**答**

$$\begin{aligned}(1) \quad 3A + B &= 3(x^2 + 3x - 2) + (-3x^2 - 5x) \\ &= 3x^2 + 9x - 6 - 3x^2 - 5x \\ &= (3x^2 - 3x^2) + (9x - 5x) - 6 \\ &= 4x - 6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad A \times B &= (x^2 + 3x - 2)(-3x^2 - 5x) \\ &= -3x^4 - 5x^3 - 9x^3 - 15x^2 + 6x^2 + 10x \\ &= -3x^4 - (5x^3 + 9x^3) - (15x^2 - 6x^2) + 10x \\ &= -3x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 10x.\end{aligned}$$



2. 展開  $(2x+1)(x-1)-(x^2+x-2)=$   $x^2-2x+1$ 。

【105 會考】

〔答〕 原式  $= 2x^2 - 2x + x - 1 - x^2 - x + 2$   
 $= (2x^2 - x^2) + (-2x + x - x) + (-1 + 2)$   
 $= x^2 - 2x + 1。$

3. 展開  $(2x-3)(3x+4)=$   $6x^2-x-12$ 。

【108 會考】

〔答〕 原式  $= 6x^2 + 8x - 9x - 12$   
 $= 6x^2 - x - 12。$

4. 已知  $A$ 、 $B$  兩多項式，若  $A+B=x^2+3x+5$ ， $A-B=3x^2-11x-11$ ，則多項式

$A=$   $2x^2-4x-3$ ， $B=$   $-x^2+7x+8$ 。

〔答〕  $\begin{cases} A+B=x^2+3x+5 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ A-B=3x^2-11x-11 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$   
 $\textcircled{1}+\textcircled{2}: 2A=4x^2-8x-6 \Rightarrow A=2x^2-4x-3。$   
 $\textcircled{1}-\textcircled{2}: 2B=-2x^2+14x+16 \Rightarrow B=-x^2+7x+8。$

5.  $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5)^2$  之  $x^4$  係數 = 35， $x^9$  係數 = 60，常數項 = 1。

〔答〕  $x^4$  項： $1 \cdot 5x^4 + 2x \cdot 4x^3 + 3x^2 \cdot 3x^2 + 4x^3 \cdot 2x + 5x^4 \cdot 1$   
 $= 5x^4 + 8x^4 + 9x^4 + 8x^4 + 5x^4$   
 $= 35x^4。$   
 $x^9$  項： $5x^4 \cdot 6x^5 + 6x^5 \cdot 5x^4$   
 $= 30x^9 + 30x^9$   
 $= 60x^9。$   
 常數項  $= 1 \times 1 = 1。$



## 銜接高中內容

- 一個  $x$  的多項式常寫成  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ，其中  $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$  均為常數。
- 除法原理：已知  $f(x), g(x)$  為兩個多項式，且  $g(x) \neq 0$ 。  
若  $f(x) \div g(x)$  得商式為  $q(x)$ ，餘式為  $r(x)$ ，則可得  $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ，  
其中  $r(x) = 0$  或  $\deg[r(x)] < \deg[g(x)]$ 。

## 進階練習題

- 設  $f(x) = 3x^5 + 4x^2 - 3x - 2, g(x) = x^2 - 2$ ，試求：
  - $f(x) + 3g(x) = \underline{3x^5 + 7x^2 - 3x - 8}$ 。
  - $2f(x) - (x+1)g(x) = \underline{6x^5 - x^3 + 7x^2 - 4x - 2}$ 。
  - $f(x) \div g(x)$  之商式 =  $\underline{3x^3 + 6x + 4}$ ，餘式 =  $\underline{9x + 6}$ 。

答

$$\begin{aligned}
 (1) f(x) + 3g(x) &= (3x^5 + 4x^2 - 3x - 2) + 3(x^2 - 2) \\
 &= 3x^5 + 4x^2 - 3x - 2 + 3x^2 - 6 \\
 &= 3x^5 + 7x^2 - 3x - 8。 \\
 (2) 2f(x) - (x+1)g(x) &= 2(3x^5 + 4x^2 - 3x - 2) - (x+1)(x^2 - 2) \\
 &= (6x^5 + 8x^2 - 6x - 4) - (x^3 - 2x + x^2 - 2) \\
 &= 6x^5 + 8x^2 - 6x - 4 - x^3 + 2x - x^2 + 2 \\
 &= 6x^5 - x^3 + 7x^2 - 4x - 2。
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 (3) \quad \begin{array}{r} 3x^3 + 0x^2 + 6x + 4 \\ x^2 + 0x - 2 \overline{) 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 4x^2 - 3x - 2} \\ \underline{3x^5 + 0x^4 - 6x^3} \phantom{+ 4} \\ 0x^4 + 6x^3 + 4x^2 \phantom{- 3x - 2} \\ \underline{0x^4 + 0x^3 + 0x^2} \phantom{- 3x - 2} \\ 6x^3 + 4x^2 - 3x \phantom{- 2} \\ \underline{6x^3 + 0x^2 - 12x} \phantom{- 2} \\ 4x^2 + 9x - 2 \\ \underline{4x^2 + 0x - 8} \\ 9x + 6 \end{array}
 \end{array}$$

商式 =  $3x^3 + 6x + 4$ ，餘式 =  $9x + 6$ 。

- 設  $f(x) = 4x^3 - 3x + 4, g(x) = x^2 + x - 1$ ，求  $f(x) \div g(x)$  之商式  $q(x) = \underline{4x - 4}$ ，餘式  $r(x) = \underline{5x}$ 。

答

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} 4x - 4 \leftarrow q(x) \\ x^2 + x - 1 \overline{) 4x^3 + 0x^2 - 3x + 4} \\ \underline{4x^3 + 4x^2 - 4x} \phantom{+ 4} \\ -4x^2 + x + 4 \\ \underline{-4x^2 - 4x + 4} \\ +5x + 0 \leftarrow r(x) \end{array}
 \end{array}$$



3. 設多項式  $f(x)$  除以  $x-5$  得商式為  $2x+3$ ，餘式為 5，則此多項式  $f(x)$  除以  $2x-1$  所得之商式 =  $x-3$ ，餘式 =  $-13$ 。

**答**  $f(x) = (x-5)(2x+3) + 5$   
 $= 2x^2 + 3x - 10x - 15 + 5$   
 $= 2x^2 - 7x - 10。$

$$\begin{array}{r} x-3 \\ 2x-1 \overline{) 2x^2-7x-10} \\ \underline{2x^2-x} \phantom{-10} \\ -6x-10 \\ \underline{-6x+3} \\ -13 \end{array}$$

4. 已知  $f(x)$  除以  $ax+b$  的商式  $q(x)$ ，餘式  $r(x)$ ，試回答下列問題：

(1) 若  $f(x)$  除以  $(x + \frac{b}{a})$ ，則商式 =  $aq(x)$ ，餘式 =  $r(x)$ 。

(2) 若  $cf(x)$  除以  $ax+b$ ，則商式 =  $cq(x)$ ，餘式 =  $cr(x)$ 。

(3) 若  $f(\frac{x}{a})$  除以  $x+b$ ，則商式 =  $q(\frac{x}{a})$ ，餘式 =  $r(\frac{x}{a})$ 。

**答** 已知  $f(x) = (ax+b)q(x) + r(x)。$

(1)  $f(x) = a(x + \frac{b}{a})q(x) + r(x)$   
 $= (x + \frac{b}{a})[aq(x)] + r(x)。$

(2)  $f(x) = (ax+b)q(x) + r(x)$   
 $\Rightarrow cf(x) = c(ax+b)q(x) + cr(x)$   
 $\Rightarrow cf(x) = (ax+b)[cq(x)] + cr(x)。$

(3)  $f(x) = (ax+b)q(x) + r(x)$   
 $\Rightarrow f(\frac{x}{a}) = (x+b)[q(\frac{x}{a})] + r(\frac{x}{a})。$

5. 設有兩多項式  $f(x)$ 、 $g(x)$ ，且  $\deg[f(x)] = m$ ， $\deg[g(x)] = n$ ， $m > n$ ，則：

(1)  $\deg[f(x) + g(x)] =$   $m$ 。

(2)  $\deg[f(x) - g(x)] =$   $m$ 。

(3)  $\deg[f(x) \cdot g(x)] =$   $m+n$ 。

**答** 令  $f(x) = x^m$ ， $g(x) = x^n$ ， $m > n$ ，

(1)  $f(x) + g(x) = x^m + x^n \Rightarrow \deg[f(x) + g(x)] = m。$

(2)  $f(x) - g(x) = x^m - x^n \Rightarrow \deg[f(x) - g(x)] = m。$

(3)  $f(x) \cdot g(x) = x^{m+n} \Rightarrow \deg[f(x) \cdot g(x)] = m+n。$



# 5 不等式



## ► 回憶一下

1. 若  $a > b$ ，則

$$(1) c > 0, \begin{cases} a+c > b+c \\ a-c > b-c \\ ac > bc \\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \end{cases} \circ$$

$$(2) c < 0, \begin{cases} a+c > b+c \\ a-c > b-c \\ ac < bc \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \end{cases} \circ$$

2. (1) 若  $0 < a < b$ ，則  $a^2 < b^2$ 。

(2) 若  $a < b < 0$ ，則  $a^2 > b^2$ 。

(3) 若  $a < b$ ，則  $a^2, b^2$  無法比較。

## 基礎練習題

1. 若  $-1 \leq x \leq 2$ ， $p = \frac{1}{2}(3x-1)$ ，則  $p$  的範圍為  $-2 \leq p \leq \frac{5}{2}$ 。

答

$$-1 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow -3 \leq 3x \leq 6$$

$$\Rightarrow -4 \leq 3x-1 \leq 5$$

$$\Rightarrow -2 \leq \frac{1}{2}(3x-1) \leq \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow -2 \leq p \leq \frac{5}{2} \circ$$



2. 若  $-2 < a < 3$  ,  $-1 < b < 4$  , 則下列範圍為何 ?

(1)  $2a - 3b$ 。

(2)  $a^2 + b^2$ 。

(3)  $ab$ 。

(提示：利用加法喔！)

**答**

(1)  $-2 < a < 3 \Rightarrow -4 < 2a < 6$  .....①

$-1 < b < 4 \Rightarrow 3 > -3b > -12 \Rightarrow -12 < -3b < 3$  .....②

① + ② 得  $-16 < 2a - 3b < 9$ 。

(2)  $-2 < a < 3 \Rightarrow 0 \leq a^2 < 9$  .....③

$-1 < b < 4 \Rightarrow 0 \leq b^2 < 16$  .....④

③ + ④ 得  $0 \leq a^2 + b^2 < 25$ 。

(3)

$a \backslash b$	-1	4
-2	2	-8
3	-3	12

$ab$  之值如上表，故  $-8 < ab < 12$ 。

3. 解下列一元一次不等式：

(1)  $4x + 1 \leq 4 + x$ 。

(2)  $5(2x + 3) - 2x < 7(x + 5)$ 。

**答**

(1)  $4x + 1 \leq 4 + x$

$\Rightarrow 4x - x \leq 4 - 1$

$\Rightarrow 3x \leq 3$

$\Rightarrow x \leq 1$ 。

(2)  $5(2x + 3) - 2x < 7(x + 5)$

$\Rightarrow 10x + 15 - 2x < 7x + 35$

$\Rightarrow 8x + 15 < 7x + 35$

$\Rightarrow 8x - 7x < 35 - 15$

$\Rightarrow x < 20$ 。



4. 解不等式  $\frac{4x-1}{3} < \frac{3x+2}{2} - \frac{1}{3}$ 。

答  $\frac{4x-1}{3} < \frac{3x+2}{2} - \frac{1}{3}$   
 $\Rightarrow 2(4x-1) < 3(3x+2) - 2$   
 $\Rightarrow 8x-2 < 9x+6-2$   
 $\Rightarrow 8x-2 < 9x+4$   
 $\Rightarrow -2-4 < 9x-8x$   
 $\Rightarrow -6 < x$ 。

5. 已知  $a$  為實數，且  $a < 0$ ，則  $3ax < 5a$  之解為  $x > \frac{5}{3}$

答  $3ax < 5a$ ，同除以  $3a$ ，但  $a < 0$ ，故  $x > \frac{5}{3}$ 。

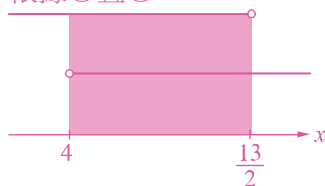
6. 老師有橘子若干顆，要分給若干個學生。若每人分 3 顆，則剩下 8 顆；若每人分 5 顆，則最後一位同學，有拿到橘子，但未達 5 顆，試問老師有橘子多少顆？學生人數共有多少人？

答 設學生有  $x$  人，則橘子共有  $(3x+8)$  顆。  
 $5(x-1) < 3x+8 < 5x \Rightarrow 5x-5 < 3x+8 < 5x$ 。

①  $5x-5 < 3x+8 \Rightarrow 2x < 13 \Rightarrow x < \frac{13}{2}$ 。

②  $3x+8 < 5x \Rightarrow 8 < 2x \Rightarrow x > 4$ 。

根據①且②，



$\Rightarrow 4 < x < \frac{13}{2}$

$\Rightarrow x$  可能為 5 或 6。

若  $x=5$ ，則學生共有 5 人，橘子有 23 顆。

若  $x=6$ ，則學生共有 6 人，橘子有 26 顆。



## 銜接高中內容

解二次不等式，讓我們舉例說明：

$$x^2 - 2x - 3 < 0,$$

① 觀察  $y=f(x)=x^2-2x-3$  的圖形。

利用配方法可得  $y=x^2-2x-3=(x^2-2x+1)-3-1=(x-1)^2-4$ 。

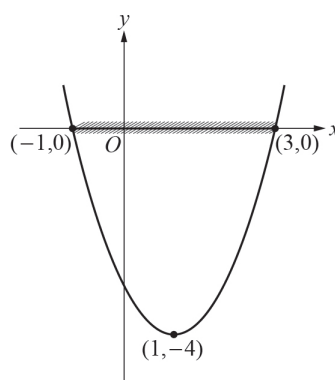
② 求出  $y=f(x)=x^2-2x-3$  與  $x$  軸之交點。

$$x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0.$$

統整上述①②，即可畫出右邊圖形，

觀察後可發現：

- (1) 若  $-1 < a < 3$ ，則  $f(a) < 0$ 。（ $x$  軸下方）
- (2) 若  $a > 3$  或  $a < -1$ ，則  $f(a) > 0$ 。（ $x$  軸上方）
- (3) 若  $a = 3$  或  $a = -1$ ，則  $f(a) = 0$ 。



## 進階練習題

1. 解下列二次不等式：

(1)  $x^2 - x - 2 < 0$ 。

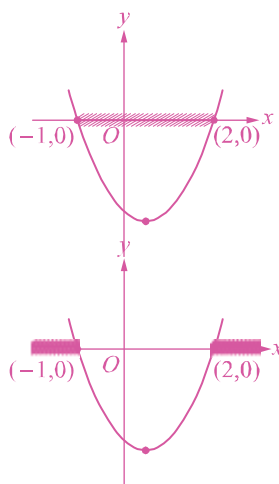
(2)  $-x^2 + x + 2 < 0$ 。

**答**

(1)  $y=f(x)=x^2-x-2$   
 $= (x-2)(x+1)$ 。

已知  $y=x^2-x-2$  為二次函數，  
 且  $x^2$  項係數為正，  
 所以開口向上，如右圖。  
 故  $-1 < x < 2$ 。

(2)  $-x^2+x+2 < 0 \Rightarrow x^2-x-2 > 0$ ，  
 由(1)可知，如右圖。  
 故  $x > 2$  或  $x < -1$ 。



2. 解不等式  $2x^2 + 2x - 3 < 0$ 。

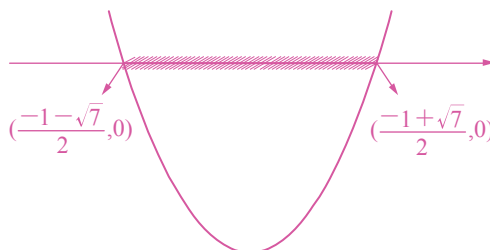
**答**

$y=f(x)=2x^2+2x-3$ ，  
 判別式  $D=4-4\times 2\times (-3)$   
 $=4+24=28$ 。

利用公式解可得  $x = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$  或  $\frac{-1-\sqrt{7}}{2}$ ，

因為  $x^2$  項係數為正，  
 所以開口向上，如右圖，

故  $\frac{-1-\sqrt{7}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ 。





3. 解不等式  $2x^2 - 2x - 1 > 0$ 。

答

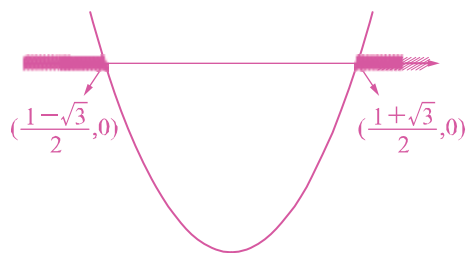
$$y = f(x) = 2x^2 - 2x - 1,$$

$$\text{判別式 } D = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-1) \\ = 4 + 8 = 12。$$

$$\text{利用公式解可得 } x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ 或 } \frac{1-\sqrt{3}}{2},$$

因為  $x^2$  項係數為正，  
所以開口向上，如右圖，

$$\text{故 } x < \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ 或 } x > \frac{1+\sqrt{3}}{2}。$$

4. 解不等式  $x^2 + 6x + 9 > 0$ 。

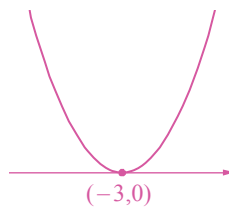
答

$$y = f(x) = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2。$$

如右圖可知，

除了  $x = -3$  以外， $f(x) > 0$ ，

故  $x < -3$  或  $x > -3$ 。

5. 解不等式  $x^2 - x + 3 > 0$ 。

答

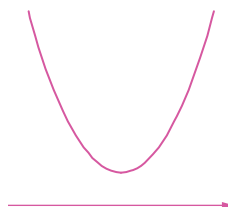
$$y = f(x) = x^2 - x + 3,$$

$$\text{判別式 } D = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -11 < 0。$$

由判別式  $D < 0$  可知，

該圖形與  $x$  軸沒有交點，如右圖，

故解為「全體實數」。







### ► 回憶一下

1. 若  $a \neq 0$ ，且  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為實數， $y = ax^2 + bx + c$  稱為二次函數，其圖形為拋物線。

2. 利用配方法：

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$= a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right] + c - a \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}。$$

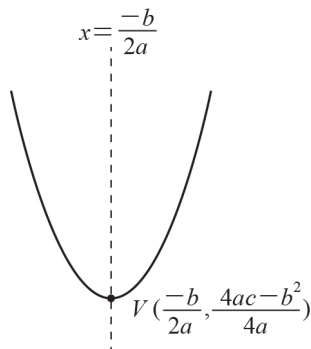
(1) 頂點坐標  $\left( -\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$ 。

(2) 對稱軸： $x = -\frac{b}{2a}$ 。

(3) 開口方向：若  $a > 0$ ，則開口向上；若  $a < 0$ ，則開口向下。

(4) 開口大小：若  $|a|$  愈大，開口愈小；若  $|a|$  愈小，開口愈大。

$a > 0$

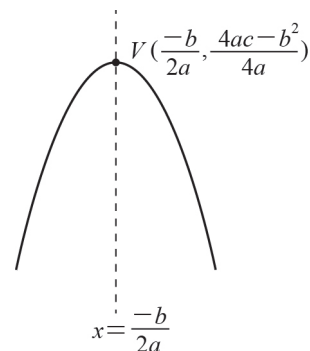


頂點為此函數之最低點

⇒ 當  $x = -\frac{b}{2a}$  時，

$y$  有最小值  $= \frac{4ac - b^2}{4a}$ 。

$a < 0$



頂點為此函數之最高點

⇒ 當  $x = -\frac{b}{2a}$  時，

$y$  有最大值  $= \frac{4ac - b^2}{4a}$ 。



# 基礎練習題

1. 二次函數  $y=2x^2+12x+22$  之頂點  $(-3, 4)$ ，對稱軸  $x=-3$ ，  
當  $x=$   $-3$ ， $y$  有最 小 值為  $4$ 。

**答**

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 12x + 22 \\ &= 2(x^2 + 6x + 9) + 22 - 18 \\ &= 2(x+3)^2 + 4。 \end{aligned}$$

頂點為  $(-3, 4)$ ，對稱軸為  $x=-3$ 。

因  $x^2$  項係數為正，故當  $x=-3$  時， $y$  有最小值為  $4$ 。

2. 將二次函數  $y=ax^2-6x+2$  向左平移 3 個單位長，再向上平移 5 個單位長後，會與  $y=-x^2+bx+c$  的圖形重合，則  $b-c=$   $8$ 。

**答**

因為  $y=-x^2+bx+c$  與  $y=ax^2-6x+2$  兩圖形相同，所以可知  $a=-1$ 。

$$y=-x^2-6x+2=-(x+3)^2+11，$$

由方程式可知原頂點  $(-3, 11)$ ，

↓  
向左 3，向上 5 平移

新頂點  $(-6, 16)$ ，

可知新方程式為  $y=-(x+6)^2+16$

$$=-(x^2+12x+36)+16$$

$$=-x^2-12x-20。$$

故  $b=-12$ ， $c=-20 \Rightarrow b-c=-12-(-20)=8$ 。

3. 若二次函數之對稱軸  $x=1$ ，且通過  $(-1, 6)$ ， $(2, 3)$ ，  
則此二次函數為  $y=(x-1)^2+2$ 。

**答**

設頂點為  $(1, k)$ ，則二次函數為  $y=a(x-1)^2+k$ ，

將  $(-1, 6)$ ， $(2, 3)$  代入，

$$\begin{cases} 6=a(-1-1)^2+k \\ 3=a(2-1)^2+k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6=4a+k \\ 3=a+k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ k=2 \end{cases}，$$

故二次函數為  $y=(x-1)^2+2$ 。



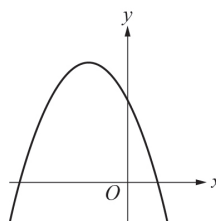
4. 已知二次函數  $y = ax^2 + bx + c$  的圖形如右，則

(1)  $a$  < 0。

(2)  $b$  < 0。

(3)  $c$  > 0。

(4)  $b^2 - 4ac$  > 0。



(提示)

係數	判斷法則
$a$	開口方向：開口向上 $\Rightarrow a > 0$ ；開口向下 $\Rightarrow a < 0$ 。
$b$	利用對稱軸 $x = \frac{-b}{2a}$ 的正負號。
$c$	與 $y$ 軸交點坐標為 $(0, c)$ 。
$b^2 - 4ac$	與 $x$ 軸的交點個數： 若兩個交點，則 $b^2 - 4ac > 0$ 。 若一個交點（重根），則 $b^2 - 4ac = 0$ 。 若沒有交點，則 $b^2 - 4ac < 0$ 。

答

(1) 開口向下： $a < 0$ 。

(2)  $\frac{-b}{2a} < 0$ ，且  $a < 0 \Rightarrow b < 0$ 。

(3) 與  $y$  軸交點  $(0, c)$ ，在  $x$  軸上方，故  $c > 0$ 。

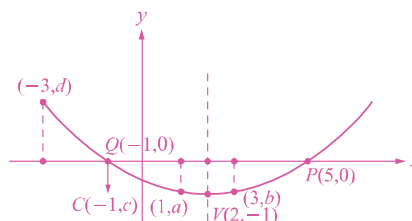
(4) 與  $x$  軸有兩個交點，故  $b^2 - 4ac > 0$ 。

5. 坐標平面上，某二次函數的頂點為  $(2, -1)$ ，此函數圖形與  $x$  軸相交於  $P$ 、 $Q$  兩點，且  $\overline{PQ} = 6$ 。若此函數通過  $(1, a)$ 、 $(3, b)$ 、 $(-1, c)$ 、 $(-3, d)$  四點，則  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  之值何者為正？

【105 會考】

答

由頂點  $(2, -1)$ ， $\overline{PQ} = 6$  可大致畫出如右圖，由圖形可知， $d > 0$ 。





6. 坐標平面上，二次函數  $y = -x^2 + 6x - 9$  的圖形的頂點為  $A$ ，且此函數圖形與  $y$  軸交於  $B$  點。若在此函數圖形上取一點  $C$ ，在  $x$  軸上取一點  $D$ ，使得四邊形  $ABCD$  為平行四邊形，則  $D$  點坐標為何？

【104 會考】

答

$$y = -x^2 + 6x - 9 = -(x-3)^2,$$

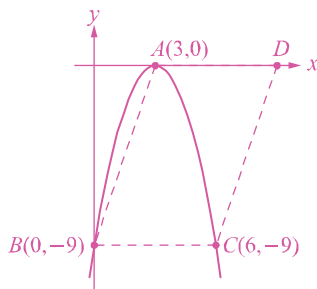
則頂點  $A(3, 0)$ 。

與  $y$  軸交於  $B$  點，令  $x=0 \Rightarrow y=-9$ ，

則  $B(0, -9)$ 。

且  $D$  點在  $x$  軸，故可得平行四邊形圖形，如右圖，

利用對稱性質可知， $C(6, -9) \Rightarrow D(9, 0)$ 。



7. 已知坐標平面上有一直線  $L$ ，其方程式為  $y+2=0$ ，且  $L$  與二次函數  $y=3x^2+a$  的圖形相交於  $A$ 、 $B$  兩點；與二次函數  $y=-2x^2+b$  的圖形相交於  $C$ 、 $D$  兩點，其中  $a$ 、 $b$  為整數。若  $\overline{AB}=2$ ， $\overline{CD}=4$ ，則  $a+b=$  1。

【107 會考】

答

$$\begin{cases} y=3x^2+a \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow -2=3x^2+a, x^2=\frac{-2-a}{3}, x=\pm\sqrt{\frac{-2-a}{3}}.$$

則  $A$ 、 $B$  兩點坐標分別為  $(\sqrt{\frac{-2-a}{3}}, -2)$ ， $(-\sqrt{\frac{-2-a}{3}}, -2)$ 。

$$\overline{AB}=2\sqrt{\frac{-2-a}{3}}=2 \Rightarrow \frac{-2-a}{3}=1 \Rightarrow a=-5.$$

$$\begin{cases} y=-2x^2+b \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow -2x^2+b=-2, x=\pm\sqrt{\frac{2+b}{2}}.$$

則  $C$ 、 $D$  兩點坐標分別為  $(\sqrt{\frac{2+b}{2}}, -2)$ ， $(-\sqrt{\frac{2+b}{2}}, -2)$ 。

$$\overline{CD}=2\sqrt{\frac{2+b}{2}}=4 \Rightarrow \frac{2+b}{2}=4 \Rightarrow b=6.$$

故  $a+b=-5+6=1$ 。







10. 已知二次函數  $y = -x^2 + 4x + 9$ ，求在下列  $x$  範圍中的最大值與最小值。

(1)  $0 \leq x \leq 5$

(2)  $3 \leq x \leq 6$

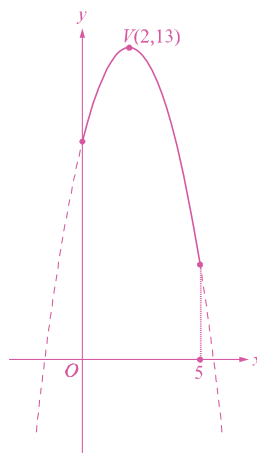
**答**

(1)  $y = -x^2 + 4x + 9 = -(x-2)^2 + 13$ 。

如右圖，圖形為實線部分。

可知最大值  $= f(2) = 13$ ，

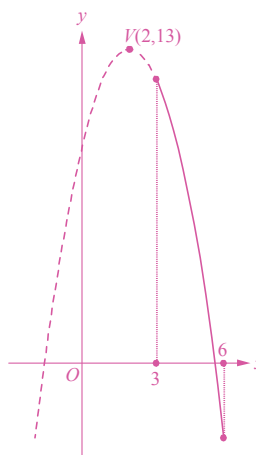
最小值  $= f(5) = 4$ 。



(2) 如右圖，圖形為實線部分。

可知最大值  $= f(3) = 12$ ，

最小值  $= f(6) = -3$ 。





# 解答篇



## 單元 1 乘法公式

### 簡答區

#### 基礎練習題

- 0.9801      2. 12600
- (1) 130 ; (2)  $2\sqrt{29}$  ; (3)  $24\sqrt{29}$
- $\frac{1}{1980}$       5. 512

#### 進階練習題

- $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$
- $(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$
- (1) 23 ; (2) 110
- (1)  $(a + b + c)(a + b - c)$  ;  
(2)  $(4x^2 + 25)(2x + 5)(2x - 5)$  ;  
(3)  $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
- (1)  $99 - 70\sqrt{2}$  ; (2)  $-19x^3 - 35y^3$

### 詳答區

#### 基礎練習題

- $$0.99^2 = (1 - 0.01)^2$$

$$= 1^2 - 2 \times 1 \times 0.01 + 0.01^2$$

$$= 1 - 0.02 + 0.0001$$

$$= 0.9801。$$
- 大正方形面積 =  $113^2$  ,  
 小正方形面積 =  $13^2$  ,  
 兩正方形面積差 =  $113^2 - 13^2$   

$$= (113 + 13)(113 - 13)$$

$$= 126 \times 100 = 12600。$$
- (1)  $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$   

$$= 12^2 - 2 \times 7$$

$$= 144 - 14$$

$$= 130。$$

$$(2) (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$= 130 - 2 \times 7$$

$$= 116。$$

$$\Rightarrow a - b = \pm \sqrt{116} = \pm 2\sqrt{29} \text{ (取正)。$$

$$(3) a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$= 12 \times 2\sqrt{29}$$

$$= 24\sqrt{29}。$$

$$4. \frac{1987^2 - 2 \times 1987 \times 7 + 7^2}{1980^2} \times \frac{1994}{1987^2 - 7^2}$$

$$= \frac{(1987 - 7)^2}{1980^2} \times \frac{1994}{(1987 + 7)(1987 - 7)}$$

$$= \frac{1980^2}{1980^2} \times \frac{1994}{1994 \times 1980}$$

$$= 1 \times \frac{1}{1980}$$

$$= \frac{1}{1980}。$$

$$5. (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \times \dots$$

$$\times (2^{256} + 1)$$

$$= (2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)$$

$$\times \dots \times (2^{256} + 1)$$

$$= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \times \dots$$

$$\times (2^{256} + 1)$$

$$= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \times \dots \times (2^{256} + 1)$$

$$= (2^8 - 1)(2^8 + 1) \times \dots \times (2^{256} + 1)$$

$$\vdots$$

$$= 2^{512} - 1。$$

$$\Rightarrow n = 512。$$

#### 進階練習題

- $$(2x - 3)^3$$

$$= (2x)^3 - 3 \times (2x)^2 \times 3 + 3 \times (2x) \times 3^2 - 3^3$$

$$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27。$$
- $$8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3$$

$$= (2x + 3y)[(2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2]$$

$$= (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)。$$



$$3. (1) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 25,$$

$$x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 25$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 25 - 2 \times x \times \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 25 - 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 23。$$

$$\begin{aligned} (2) x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^2 - x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= 5 \times (23 - 1) \\ &= 5 \times 22 = 110。 \end{aligned}$$

$$4. (1) (a+b)^2 - c^2 = [(a+b)+c][(a+b)-c]$$

$$= (a+b+c)(a+b-c)。$$

$$\begin{aligned} (2) 16x^4 - 625 &= (4x^2)^2 - 25^2 \\ &= (4x^2 + 25)(4x^2 - 25) \\ &= (4x^2 + 25)[(2x)^2 - 5^2] \\ &= (4x^2 + 25)(2x+5)(2x-5)。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) x^6 - 1 &= (x^3)^2 - 1^2 \\ &= (x^3 - 1)(x^3 + 1) \\ &= (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1) \\ &= (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. (1) (3-2\sqrt{2})^3 &= 3^3 - 3 \times 3^2 \times 2\sqrt{2} + 3 \times 3 \times (2\sqrt{2})^2 \\ &\quad - (2\sqrt{2})^3 \\ &= 27 - 54\sqrt{2} + 72 - 16\sqrt{2} \\ &= 99 - 70\sqrt{2}。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2) &- (3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2) \\ &= [(2x)^3 - (3y)^3] - [(3x)^3 + (2y)^3] \\ &= (8x^3 - 27y^3) - (27x^3 + 8y^3) \\ &= -19x^3 - 35y^3。 \end{aligned}$$

## 單元 2 因式分解

### 簡答區

#### 基礎練習題

- $(x+3)(3x+8)；$
  - $-(2x+3)(x-5)；$
  - $-(x-3)(x+4)；$
- $(x+8)(x-8)；$
  - $(x-4)^2；$
  - $4(x+3)^2$
- $(5x+3)(x+1)；$
  - $(7x-2)(3x+4)；$
  - $2(x-3)(2x+5)；$
- $(x-6)(x-a)；$
  - $(x+y-1)(x-y-1)；$
  - $2y(7x+5y)；$
- $-x^5(3x-4)(2x+1)$

#### 進階練習題

- $(2x-3)(4x^2+6x+9)；$
  - $-4x^2(x^2+2)；$
- $(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)；$
  - $(x^2+5x+13)(x^2+5x-3)；$
- $(x^2+x+4)(x^2-x+4)；$
  - $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)；$
- 18
- $\frac{5}{3}$

### 詳答區

#### 基礎練習題

- $$\begin{aligned} &(x+3)(3x+7)+(x+3) \\ &= (x+3)[(3x+7)+1] \\ &= (x+3)(3x+7+1) \\ &= (x+3)(3x+8)。 \end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned} &(2x+1)(2x+3)-(3x-4)(2x+3) \\ &= (2x+3)[(2x+1)-(3x-4)] \\ &= (2x+3)(2x+1-3x+4) \\ &= (2x+3)(-x+5) \\ &= (2x+3)[-(x-5)] \\ &= -(2x+3)(x-5)。 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (3) & (x-3)^2 + (2x+1)(3-x) \\
 &= (x-3)^2 + (2x+1)[-(x-3)] \\
 &= (x-3)^2 - (2x+1)(x-3) \\
 &= (x-3)[(x-3) - (2x+1)] \\
 &= (x-3)(x-3-2x-1) \\
 &= (x-3)(-x-4) \\
 &= (x-3)[-(x+4)] \\
 &= -(x-3)(x+4) \circ
 \end{aligned}$$

$$2. (1) x^2 - 64 = x^2 - 8^2 = (x+8)(x-8) \circ$$

$$(2) x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 = (x-4)^2 \circ$$

$$\begin{aligned}
 (3) & (2x+3)^2 + 6(2x+3) + 9 \\
 &= (2x+3)^2 + 2 \times (2x+3) \times 3 + 3^2 \\
 &= [(2x+3) + 3]^2 \\
 &= (2x+6)^2 \\
 &= [2(x+3)]^2 \\
 &= 4(x+3)^2 \circ
 \end{aligned}$$

$$3. (1) 5x^2 + 8x + 3$$

$$\begin{array}{r}
 5x \quad \times \quad +3 \\
 x \quad \quad +1 \\
 \hline
 5x \quad + \quad 3x = 8x \\
 = (5x+3)(x+1) \circ
 \end{array}$$

$$(2) 21x^2 + 22x - 8$$

$$\begin{array}{r}
 7x \quad \times \quad -2 \\
 3x \quad \quad +4 \\
 \hline
 28x \quad - \quad 6x = 22x \\
 = (7x-2)(3x+4) \circ
 \end{array}$$

$$(3) \text{ 令 } A = (2x+1),$$

$$(2x+1)^2 - 3(2x+1) - 28$$

$$= A^2 - 3A - 28$$

$$\begin{array}{r}
 A \quad \times \quad -7 \\
 A \quad \quad +4 \\
 \hline
 4A \quad - \quad 7A = -3A
 \end{array}$$

$$= (A-7)(A+4)$$

$$= [(2x+1)-7][(2x+1)+4]$$

$$= (2x-6)(2x+5)$$

$$= [2(x-3)](2x+5)$$

$$= 2(x-3)(2x+5) \circ$$

$$4. (1) x^2 - 6x - ax + 6a$$

$$= (x^2 - 6x) - (ax - 6a)$$

$$= x(x-6) - a(x-6)$$

$$= (x-6)(x-a) \circ$$

$$(2) x^2 - y^2 - 2x + 1$$

$$= (x^2 - 2x + 1) - y^2$$

$$= (x-1)^2 - y^2$$

$$= (x-1+y)(x-1-y)$$

$$= (x+y-1)(x-y-1) \circ$$

$$(3) \text{ 令 } A = x+y, B = x-y,$$

$$6(x+y)^2 - 5(x^2 - y^2) - (x-y)^2 \circ$$

$$= 6A^2 - 5AB - B^2$$

$$\begin{array}{r}
 6A \quad \times \quad +B \\
 A \quad \quad -B \\
 \hline
 -6AB + AB = -5AB
 \end{array}$$

$$= (6A+B)(A-B)$$

$$= [6(x+y) + (x-y)][(x+y) - (x-y)]$$

$$= (7x+5y)(2y)$$

$$= 2y(7x+5y) \circ$$

$$5. (3x+2)(-x^6+3x^5) + (3x+2)(-2x^6+x^5)$$

$$+ (x+1)(3x^6-4x^5)$$

$$= (3x+2)[(-x^6+3x^5) + (-2x^6+x^5)]$$

$$+ (x+1)(3x^6-4x^5)$$

$$= (3x+2)[(-x^6+3x^5-2x^6+x^5)]$$

$$+ (x+1)(3x^6-4x^5)$$

$$= (3x+2)(-3x^6+4x^5) + (x+1)(3x^6-4x^5)$$

$$= (3x+2)[- (3x^6-4x^5)] + (x+1)(3x^6-4x^5)$$

$$= - (3x+2)(3x^6-4x^5) + (x+1)(3x^6-4x^5)$$

$$= (3x^6-4x^5)[- (3x+2) + (x+1)]$$

$$= x^5(3x-4)(-3x-2+x+1)$$

$$= x^5(3x-4)(-2x-1)$$

$$= -x^5(3x-4)(2x+1) \circ$$

# 進階練習題

$$1. (1) 8x^3 - 27$$

$$= (2x)^3 - 3^3$$

$$= (2x-3)[(2x)^2 + (2x) \cdot 3 + 3^2]$$

$$= (2x-3)(4x^2 + 6x + 9) \circ$$

$$(2) (x^2+2)(x^4-2x^2+4)$$

$$- (x^2+2)(x^4+2x^2+4)$$

$$= (x^2+2)[(x^4-2x^2+4) - (x^4+2x^2+4)]$$

$$= (x^2+2)[x^4-2x^2+4-x^4-2x^2-4]$$

$$= (x^2+2)(-4x^2)$$

$$= -4x^2(x^2+2) \circ$$

$$2. (1) x^4 - 10x^2 + 9$$

$$x^2 \quad \times \quad -9$$

$$x^2 \quad \quad -1$$

$$\hline -x^2 - 9x^2 = -10x^2$$

$$= (x^2-9)(x^2-1)$$

$$= (x+3)(x-3)(x+1)(x-1) \circ$$



$$\begin{aligned}
 (2) & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-63 \\
 &= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-63 \\
 &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-63.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{令 } A &= x^2+5x, \\
 &= (A+4)(A+6)-63 \quad \begin{array}{r} A \times +13 \\ A \times -3 \\ \hline -3A+13A=10A \end{array} \\
 &= A^2+10A+24-63 \\
 &= A^2+10A-39 \\
 &= (A+13)(A-3) \\
 &= (x^2+5x+13)(x^2+5x-3).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. (1) & x^4+7x^2+16 \\
 &= (x^4+8x^2+16)-x^2 \\
 &= (x^2+4)^2-x^2 \\
 &= [(x^2+4)+x][(x^2+4)-x] \\
 &= (x^2+x+4)(x^2-x+4).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & x^4+64 \\
 &= (x^4+16x^2+64)-16x^2 \\
 &= (x^2+8)^2-(4x)^2 \\
 &= [(x^2+8)+4x][(x^2+8)-4x] \\
 &= (x^2+4x+8)(x^2-4x+8).
 \end{aligned}$$

4. 〈方法1〉

$$\begin{array}{r}
 4x+3 \\
 2x+3 \overline{) 8x^2+ax+9} \\
 \underline{8x^2+12x} \phantom{9} \\
 (a-12)x+9 \\
 \underline{6x+9} \\
 0
 \end{array}$$

$$\Rightarrow a-12=6.$$

$$\therefore a=18$$

〈方法2〉

$$\text{令 } f(x)=8x^2+ax+9$$

根據因式定理,  $f(-\frac{3}{2})=0$ ,

$$f(-\frac{3}{2})^2+a(-\frac{3}{2})+9=0$$

$$\Rightarrow a=18.$$

$$5. \text{ 令 } f(x)=x^4-3ax^2+bx+4,$$

根據因式定理可知:

$$\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-3a-b+4=0 \\ 16-12a+2b+4=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a+b=5 \\ 6a-b=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{5}{3} \\ b=0 \end{cases}.$$

$$\therefore a+b=\frac{5}{3}$$

## 單元 3

## 指數律與科學記號

## 簡答區

## 基礎練習題

1. (1)  $-134$ ; (2)  $-47$

2. (1)  $-243$ ; (2)  $64$ ; (3)  $\frac{1}{16}$

3. (1)  $1.23 \times 10^{-5}$ ; (2)  $1.23 \times 10^7$ ; (3)  $1.23 \times 10^{-12}$

4. (1)  $7.15 \times 10^{-7}$ ; (2)  $6.25 \times 10^{-7}$

5. (1)  $5.2 \times 10^{13}$ ; (2)  $1.3 \times 10^5$       6.  $4.08 \times 10^{15}$

## 進階練習題

1. (1)  $\sqrt{3}$ ; (2)  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ; (3)  $\sqrt[3]{9}$ ; (4)  $3\sqrt{3}$

2. (1)  $\frac{27}{8}$ ; (2)  $\frac{1}{125}$       3. (1)  $9$ ; (2)  $\frac{1}{81}$

4. (1)  $98$ ; (2)  $970$ ; (3)  $9602$

5. (1)  $\frac{4}{5}$ ; (2)  $27$ ; (3)  $\frac{1}{2}$

## 詳答區

## 基礎練習題

1. (1)  $-3^4-7^2-\frac{2^6}{(-2)^4}=-81-49-\frac{64}{16}$

$$=-134.$$

$$(2) -4^3+(-5)^0+(-2)^4=-64+1+16=-47.$$

2. (1)  $(-3)^3 \times (-3)^2 = (-3)^5 = -243.$

$$(2) (2^2)^3 = 2^6 = 64.$$

$$(3) \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

3. (1)  $0.0000123 = 1.23 \times 10^{-5}.$

$$(2) 12300000 = 1.23 \times 10^7.$$

$$(3) 12300 \times 10^{-16} = 1.23 \times 10^4 \times 10^{-16} = 1.23 \times 10^{-12}.$$

$$\begin{aligned}
 4. (1) a+b &= 6.7 \times 10^{-7} + 4.5 \times 10^{-8} \\
 &= 6.7 \times 10^{-7} + 0.45 \times 10^{-7} \\
 &= (6.7+0.45) \times 10^{-7} \\
 &= 7.15 \times 10^{-7}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) a-b &= 6.7 \times 10^{-7} - 4.5 \times 10^{-8} \\
 &= 6.7 \times 10^{-7} - 0.45 \times 10^{-7} \\
 &= (6.7-0.45) \times 10^{-7} \\
 &= 6.25 \times 10^{-7}.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 5. (1) a \times b &= (2.6 \times 10^9) \times (2 \times 10^4) \\ &= 2.6 \times 2 \times 10^9 \times 10^4 \\ &= 5.2 \times 10^{13}。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) a \div b &= (2.6 \times 10^9) \div (2 \times 10^4) \\ &= \frac{2.6 \times 10^9}{2 \times 10^4} = 1.3 \times 10^5。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. 1.36 \times 10^{18} \times 0.3\% &= 1.36 \times 10^{18} \times 0.003 \\ &= 1.36 \times 10^{18} \times 3 \times 10^{-3} \\ &= 4.08 \times 10^{15}。 \end{aligned}$$

進階練習題

$$1. (1) 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}。$$

$$(2) 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}。$$

$$(3) 3^{\frac{2}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}。$$

$$(4) 3^{\frac{3}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}。$$

$$\begin{aligned} 2. (1) \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} &= \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}。 \end{aligned}$$

$$(2) \frac{5^{-0.3} \times 5^{-2.9}}{5^{-0.2}} = \frac{5^{-3.2}}{5^{-0.2}} = 5^{-3} = \frac{1}{125}。$$

$$3. (1) a^{\frac{3}{2}} = 27, \text{兩邊同時取}\frac{2}{3}\text{次方,}$$

$$\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}},$$

$$a = 27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9。$$

$$(2) 8^b = 729 \Rightarrow (2^3)^b = 729$$

$$\Rightarrow 2^{3b} = 3^6, \text{兩邊同時取}\frac{2}{3}\text{次方,}$$

$$\Rightarrow (2^{3b})^{-\frac{2}{3}} = (3^6)^{-\frac{2}{3}}, 2^{-2b} = 3^{-4},$$

$$(2^2)^{-b} = \frac{1}{81}, 4^{-b} = \frac{1}{81}。$$

$$4. (1) a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 10, \text{兩邊平方,}$$

$$\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 100,$$

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2 \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} + \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 100,$$

$$a + 2 + a^{-1} = 100。 \therefore a + a^{-1} = 98$$

$$(2) a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 + \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^3$$

$$= \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right) \left[\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left. + \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2\right]$$

$$= 10 \times (a^1 - 1 + a^{-1})$$

$$= 10 \times (98 - 1) = 970。$$

$$\begin{aligned} (3) a^2 + a^{-2} &= (a^1 + a^{-1})^2 - 2 \times a^1 \times a^{-1} \\ &= 98^2 - 2 = 9604 - 2 \\ &= 9602。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. (1) \text{原式} &= (0.9^3)^{-\frac{2}{3}} \left[\left(\frac{9}{5}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= 0.9^{-2} \left(\frac{9}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \left(\frac{10}{3^2}\right)^2 \left(\frac{3^2}{5}\right) \left(\frac{3^2}{5^2}\right) \\ &= \frac{10^2 \times 3^4}{3^4 \times 5^3} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= [(4 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7})]^{\frac{3}{2}} \\ &= (4^2 - \sqrt{7}^2)^{\frac{3}{2}} = (16 - 7)^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{3}{2}} \\ &= 27。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{原式} &= [(2^3)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} (2^2)^{\frac{1}{8}} (2^6)^{-\frac{1}{3}} \\ &= 2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{-2} = 2^{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 2} = 2^{-1} = \frac{1}{2}。 \end{aligned}$$



## 單元 4 多項式的四則運算

## 簡答區

## 基礎練習題

1. (1)  $4x-6$ ; (2)  $-3x^4-14x^3-9x^2+10x$   
 2.  $x^2-2x+1$       3.  $6x^2-x-12$   
 4.  $A=2x^2-4x-3$ ,  $B=-x^2+7x+8$   
 5. 35, 60, 1

## 進階練習題

1. (1)  $3x^5+7x^2-3x-8$ ; (2)  $6x^5-x^3+7x^2-4x-2$ ;  
 (3) 商式  $= 3x^3+6x+4$ , 餘式  $= 9x+6$   
 2.  $4x-4$ ,  $5x$       3. (1)  $x-3$ ; (2)  $-13$   
 4. (1)  $aq(x)$ ,  $r(x)$ ; (2)  $cq(x)$ ,  $cr(x)$ ;  
 (3)  $q(\frac{x}{a})$ ,  $r(\frac{x}{a})$   
 5. (1)  $m$ ; (2)  $m$ ; (3)  $m+n$

## 詳答區

## 基礎練習題

1. (1)  $3A+B=3(x^2+3x-2)+(-3x^2-5x)$   
 $=3x^2+9x-6-3x^2-5x$   
 $=(3x^2-3x^2)+(9x-5x)-6$   
 $=4x-6$ 。  
 (2)  $A \times B=(x^2+3x-2)(-3x^2-5x)$   
 $=-3x^4-5x^3-9x^3-15x^2+6x^2+10x$   
 $=-3x^4-(5x^3+9x^3)-(15x^2-6x^2)$   
 $+10x$   
 $=-3x^4-14x^3-9x^2+10x$ 。  
 2. 原式  $= 2x^2-2x+x-1-x^2-x+2$   
 $=(2x^2-x^2)+(-2x+x-x)+(-1+2)$   
 $=x^2-2x+1$ 。  
 3. 原式  $= 6x^2+8x-9x-12$   
 $=6x^2-x-12$ 。  
 4.  $\begin{cases} A+B=x^2+3x+5 \dots\dots\dots ① \\ A-B=3x^2-11x-11 \dots\dots\dots ② \end{cases}$   
 ①+②:  $2A=4x^2-8x-6$   
 $\Rightarrow A=2x^2-4x-3$ 。  
 ①-②:  $2B=-2x^2+14x+16$   
 $\Rightarrow B=-x^2+7x+8$ 。

5.  $x^4$  項:  $1 \cdot 5x^4+2x \cdot 4x^3+3x^2 \cdot 3x^2+4x^3 \cdot 2x+5x^4 \cdot 1$   
 $=5x^4+8x^4+9x^4+8x^4+5x^4$   
 $=35x^4$ 。  
 $x^9$  項:  $5x^4 \cdot 6x^5+6x^5 \cdot 5x^4$   
 $=30x^9+30x^9=60x^9$ 。  
 常數項  $= 1 \times 1 = 1$ 。

## 進階練習題

1. (1)  $f(x)+3g(x)$   
 $=(3x^5+4x^2-3x-2)+3(x^2-2)$   
 $=3x^5+4x^2-3x-2+3x^2-6$   
 $=3x^5+7x^2-3x-8$ 。  
 (2)  $2f(x)-(x+1)g(x)$   
 $=2(3x^5+4x^2-3x-2)-(x+1)(x^2-2)$   
 $=(6x^5+8x^2-6x-4)-(x^3-2x+x^2-2)$   
 $=6x^5+8x^2-6x-4-x^3+2x-x^2+2$   
 $=6x^5-x^3+7x^2-4x-2$ 。  
 (3) 
$$\begin{array}{r} 3x^3+0x^2+6x+4 \\ x^2+0x-2 \overline{) 3x^5+0x^4+0x^3+4x^2-3x-2} \\ \underline{3x^5+0x^4-6x^3} \phantom{-2} \\ 0x^4+6x^3+4x^2 \phantom{-2} \\ \underline{0x^4+0x^3+0x^2} \phantom{-2} \\ 6x^3+4x^2-3x \phantom{-2} \\ \underline{6x^3+0x^2-12x} \phantom{-2} \\ 4x^2+9x-2 \phantom{-2} \\ \underline{4x^2+0x-8} \phantom{-2} \\ 9x+6 \end{array}$$
  
 商式  $= 3x^3+6x+4$ , 餘式  $= 9x+6$ 。  
 2. 
$$\begin{array}{r} 4x-4 \leftarrow q(x) \\ x^2+x-1 \overline{) 4x^3+0x^2-3x+4} \\ \underline{4x^3+4x^2-4x} \phantom{+4} \\ -4x^2+x+4 \phantom{+4} \\ \underline{-4x^2-4x+4} \phantom{+4} \\ +5x+0 \leftarrow r(x) \end{array}$$
  
 3.  $f(x)=(x-5)(2x+3)+5$   
 $=2x^2+3x-10x-15+5$   
 $=2x^2-7x-10$ 。  

$$\begin{array}{r} x-3 \\ 2x-1 \overline{) 2x^2-7x-10} \\ \underline{2x^2-x} \phantom{-10} \\ -6x-10 \phantom{-10} \\ \underline{-6x+3} \phantom{-10} \\ -13 \end{array}$$



4. 已知  $f(x) = (ax+b)q(x) + r(x)$ 。

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= a\left(x + \frac{b}{a}\right)q(x) + r(x) \\ &= \left(x + \frac{b}{a}\right)[aq(x)] + r(x)。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) f(x) &= (ax+b)q(x) + r(x) \\ \Rightarrow cf(x) &= c(ax+b)q(x) + cr(x) \\ \Rightarrow cf(x) &= (ax+b)[cq(x)] + cr(x)。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) f(x) &= (ax+b)q(x) + r(x) \\ \Rightarrow f\left(\frac{x}{a}\right) &= \left(x + \frac{b}{a}\right)\left[q\left(\frac{x}{a}\right)\right] + r\left(\frac{x}{a}\right)。 \end{aligned}$$

5. 令  $f(x) = x^m$ ,  $g(x) = x^n$ ,  $m > n$ ,

$$\begin{aligned} (1) f(x) + g(x) &= x^m + x^n \\ \Rightarrow \deg[f(x) + g(x)] &= m。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) f(x) - g(x) &= x^m - x^n \\ \Rightarrow \deg[f(x) - g(x)] &= m。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) f(x) \cdot g(x) &= x^{m+n} \\ \Rightarrow \deg[f(x) \cdot g(x)] &= m+n。 \end{aligned}$$

## 單元 5 不等式

### 簡答區

#### 基礎練習題

- $-2 \leq p \leq \frac{5}{2}$
- (1)  $-16 < 2a - 3b < 9$ ;  
(2)  $0 \leq a^2 + b^2 < 25$ ;  
(3)  $-8 < ab < 12$
- (1)  $x \leq 1$ ; (2)  $x < 20$
- $-6 < x$       5.  $x > \frac{5}{3}$
- 學生共有 5 人，橘子有 23 顆；  
學生共有 6 人，橘子有 26 顆。

#### 進階練習題

- (1)  $-1 < x < 2$ ; (2)  $x > 2$  或  $x < -1$
- $\frac{-1-\sqrt{7}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$
- $x < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$  或  $x > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$
- $x < -3$  或  $x > -3$
- 全體實數

### 詳答區

#### 基礎練習題

- $-1 \leq x \leq 2$   
 $\Rightarrow -3 \leq 3x \leq 6$   
 $\Rightarrow -4 \leq 3x - 1 \leq 5$   
 $\Rightarrow -2 \leq \frac{1}{2}(3x - 1) \leq \frac{5}{2}$   
 $\Rightarrow -2 \leq p \leq \frac{5}{2}。$
- (1)  $-2 < a < 3 \Rightarrow -4 < 2a < 6$  .....①  
 $-1 < b < 4 \Rightarrow 3 > -3b > -12$   
 $\Rightarrow -12 < -3b < 3$  .....②  
 ① + ② 得  $-16 < 2a - 3b < 9。$   
 (2)  $-2 < a < 3 \Rightarrow 0 \leq a^2 < 9$  .....③  
 $-1 < b < 4 \Rightarrow 0 \leq b^2 < 16$  .....④  
 ③ + ④ 得  $0 \leq a^2 + b^2 < 25。$



(3)

$a \backslash b$	-1	4
-2	2	-8
3	-3	12

$ab$  之值如上表，故  $-8 < ab < 12$ 。

3. (1)  $4x+1 \leq 4+x$ 

$$\Rightarrow 4x - x \leq 4 - 1$$

$$\Rightarrow 3x \leq 3$$

$$\Rightarrow x \leq 1。$$

(2)  $5(2x+3) - 2x < 7(x+5)$ 

$$\Rightarrow 10x + 15 - 2x < 7x + 35$$

$$\Rightarrow 8x + 15 < 7x + 35$$

$$\Rightarrow 8x - 7x < 35 - 15$$

$$\Rightarrow x < 20。$$

4.  $\frac{4x-1}{3} < \frac{3x+2}{2} - \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow 2(4x-1) < 3(3x+2) - 2$$

$$\Rightarrow 8x - 2 < 9x + 6 - 2$$

$$\Rightarrow 8x - 2 < 9x + 4$$

$$\Rightarrow -2 - 4 < 9x - 8x$$

$$\Rightarrow -6 < x。$$

5.  $3ax < 5a$ ，同除以  $3a$ ，但  $a < 0$ ，故  $x > \frac{5}{3}$ 。6. 設學生有  $x$  人，則橘子共有  $(3x+8)$  顆。

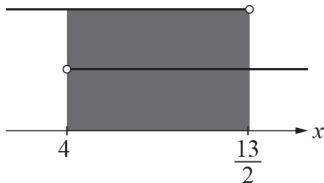
$$5(x-1) < 3x+8 < 5x，$$

$$\Rightarrow 5x - 5 < 3x + 8 < 5x，$$

①  $5x - 5 < 3x + 8 \Rightarrow 2x + 13 \Rightarrow x < \frac{13}{2}。$

②  $3x + 8 < 5x \Rightarrow 8 < 2x \Rightarrow x > 4。$

根據①且②，



$$\Rightarrow 4 < x < \frac{13}{2}$$

 $\Rightarrow x$  可能為 5 或 6。若  $x=5$ ，則學生共有 5 人，橘子有 23 顆。若  $x=6$ ，則學生共有 6 人，橘子有 26 顆。

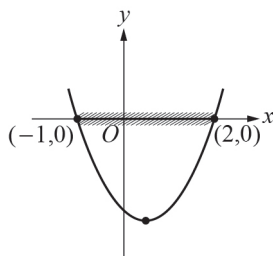
## 進階練習題

1. (1)  $y=f(x)=x^2-x-2$ 

$$=(x-2)(x+1)。$$

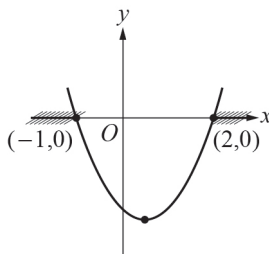
已知  $y=x^2-x-2$  為二次函數，且  $x^2$  項係數為正，

所以開口向上，如下圖。

故  $-1 < x < 2$ 。

(2)  $-x^2+x+2 < 0 \Rightarrow x^2-x-2 > 0$ ，

由(1)可知，如下圖。

故  $x > 2$  或  $x < -1$ 。

2.  $y=f(x)=2x^2+2x-3$ ，

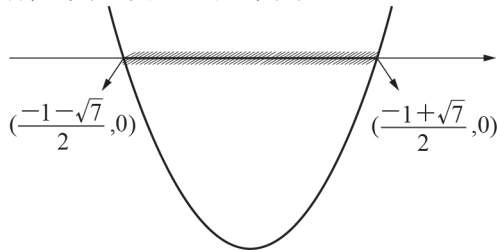
判別式  $D=4-4 \times 2 \times (-3)$

$$=4+24=28。$$

利用公式解可得  $x = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$  或  $\frac{-1-\sqrt{7}}{2}$ ，

因為  $x^2$  項係數為正，

所以開口向上，如下圖，



故  $\frac{-1-\sqrt{7}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{7}}{2}。$

3.  $y=f(x)=2x^2-2x-1$ ，

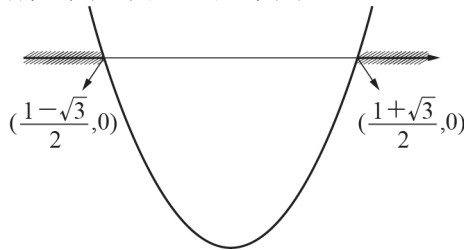
判別式  $D=(-2)^2-4 \times 2 \times (-1)$

$$=4+8=12。$$

利用公式解可得  $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$  或  $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ，

因為  $x^2$  項係數為正，

所以開口向上，如下圖，

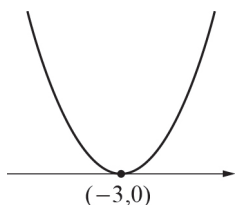


故  $x < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$  或  $x > \frac{1+\sqrt{3}}{2}。$



$$4. y=f(x)=x^2+6x+9=(x+3)^2。$$

如下圖可知，



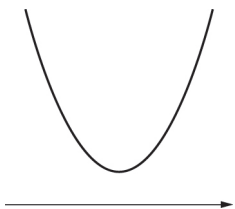
除了  $x=-3$  以外， $f(x)>0$ ，  
故  $x<-3$  或  $x>-3$ 。

$$5. y=f(x)=x^2-x+3，$$

判別式  $D=(-1)^2-4\times 1\times 3=-11<0$ 。

由判別式  $D<0$  可知，

該圖形與  $x$  軸沒有交點，如下圖，



故解為「全體實數」。

## 單元 6 二元函數

### 簡答區

#### 基礎練習題

1.  $(-3, 4)$ ， $x=-3$ ， $-3$ ，小， $4$

2.  $8$

3.  $y=(x-1)^2+2$

4. (1)  $<$ ；(2)  $<$ ；(3)  $>$ ；(4)  $>$

5.  $d>0$     6.  $D(9, 0)$     7.  $1$

8. (1)  $x^2$ ；

(2) 當  $x$  值為  $4$  時，五邊形  $PQABR$  面積有最大值為  $120$  平方公分

9.  $(0, \frac{27}{2})$

10. (1) 最大值  $=f(2)=13$ ，最小值  $=f(5)=4$ ；

(2) 最大值  $=f(3)=12$ ，最小值  $=f(6)=-3$

### 詳答區

#### 基礎練習題

1.  $y=2x^2+12x+22$

$$=2(x^2+6x+9)+22-18$$

$$=2(x+3)^2+4。$$

頂點為  $(-3, 4)$ ，對稱軸為  $x=-3$ 。

因  $x^2$  項係數為正，

故當  $x=-3$  時， $y$  有最小值為  $4$ 。

2. 因為  $y=-x^2+bx+c$  與  $y=ax^2-6x+2$

兩圖形相同，所以可知  $a=-1$ 。

$$y=-x^2-6x+2=-(x+3)^2+11，$$

由方程式可知原頂點  $(-3, 11)$ ，

↓ 向左 3，向上 5 平移

新頂點  $(-6, 16)$ ，

可知新方程式為  $y=-(x+6)^2+16$

$$=-(x^2+12x+36)+16$$

$$=-x^2-12x-20。$$

故  $b=-12$ ， $c=-20$

$$\Rightarrow b-c=-12-(-20)=8。$$



3. 設頂點為  $(1, k)$ ,

則二次函數為  $y = a(x-1)^2 + k$ ,

將  $(-1, 6), (2, 3)$  代入,

$$\begin{cases} 6 = a(-1-1)^2 + k \\ 3 = a(2-1)^2 + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 4a + k \\ 3 = a + k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ k = 2 \end{cases},$$

故二次函數為  $y = (x-1)^2 + 2$ 。

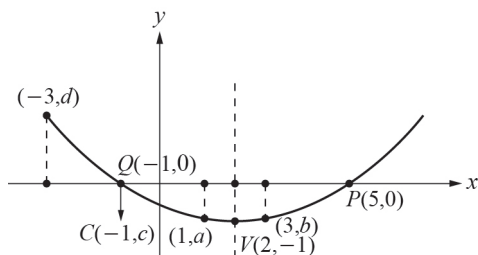
4. (1) 開口向下:  $a < 0$ 。

(2)  $\frac{-b}{2a} < 0$ , 且  $a < 0 \Rightarrow b < 0$ 。

(3) 與  $y$  軸交點  $(0, c)$ , 在  $x$  軸上方, 故  $c > 0$ 。

(4) 與  $x$  軸有兩個交點, 故  $b^2 - 4ac > 0$ 。

5. 由頂點  $(2, -1)$ ,  $\overline{PQ} = 6$  可大致畫出如下圖,



由圖形可知,  $d > 0$ 。

6.  $y = -x^2 + 6x - 9 = -(x-3)^2$ ,

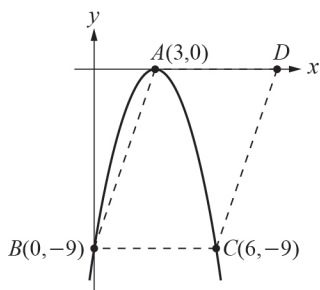
則頂點  $A(3, 0)$ 。

與  $y$  軸交於  $B$  點, 令  $x = 0 \Rightarrow y = -9$ ,

則  $B(0, -9)$ 。

且  $D$  點在  $x$  軸,

故可得平行四邊形圖形, 如下圖,



利用對稱性質可知,  $C(6, -9) \Rightarrow D(9, 0)$ 。

$$7. \begin{cases} y = 3x^2 + a \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow -2 = 3x^2 + a,$$

$$x^2 = \frac{-2-a}{3}, x = \pm \sqrt{\frac{-2-a}{3}}.$$

則  $A, B$  兩點坐標分別為

$$\left( \sqrt{\frac{-2-a}{3}}, -2 \right), \left( -\sqrt{\frac{-2-a}{3}}, -2 \right).$$

$$\overline{AB} = 2\sqrt{\frac{-2-a}{3}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{-2-a}{3} = 1 \Rightarrow a = -5.$$

$$\begin{cases} y = -2x^2 + b \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow -2x^2 + b = -2,$$

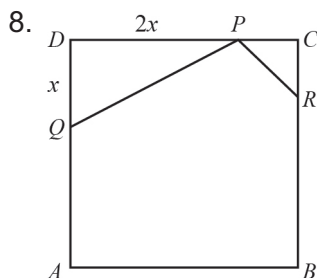
$$x = \pm \sqrt{\frac{2+b}{2}}.$$

則  $C, D$  兩點坐標分別為

$$\left( \sqrt{\frac{2+b}{2}}, -2 \right), \left( -\sqrt{\frac{2+b}{2}}, -2 \right).$$

$$\overline{CD} = 2\sqrt{\frac{2+b}{2}} = 4 \Rightarrow \frac{2+b}{2} = 4 \Rightarrow b = 6.$$

故  $a + b = -5 + 6 = 1$ 。



$$(1) \triangle PDQ \text{ 面積} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x = x^2.$$

$$(2) \text{ 由(1)知, } \overline{PC} = 12 - 2x,$$

且已知  $\overline{PC} = \overline{CR}$ ,

$$\therefore \triangle PCR \text{ 面積} = \frac{1}{2} (12 - 2x)^2$$

五邊形  $PQABR$  面積

$$= \text{正方形 } ABCD \text{ 面積} - \triangle PDQ \text{ 面積} - \triangle PCR \text{ 面積}$$

$$= 144 - x^2 - \frac{1}{2} (12 - 2x)^2$$

$$= 144 - x^2 - 72 + 24x - 2x^2$$

$$= -3x^2 + 24x + 72$$

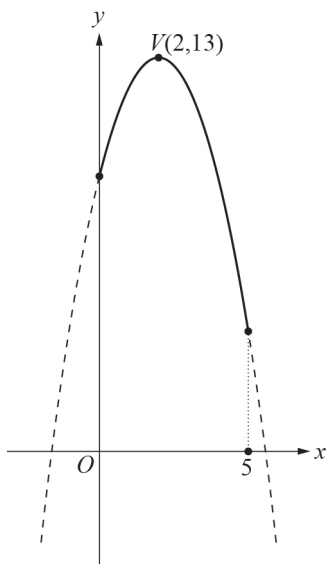
$$= -3(x-4)^2 + 120.$$

故當  $x$  值為 4 時, 五邊形  $PQABR$  面積有最大值 120 平方公分。



9. 設二次函數  $y = a(x+3)^2$ ，  
 且已知  $\triangle ABC$  為正三角形，令其邊長為  $b$ ，  
 則高  $= \frac{\sqrt{3}}{2}b = 2 \Rightarrow b = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ ，  
 故  $C(-3 + \frac{2}{3}\sqrt{3}, 2)$ 。  
 將  $C(-3 + \frac{2}{3}\sqrt{3}, 2)$  代入  $y = a(x+3)^2$ ，  
 得  $2 = a(-3 + \frac{2}{3}\sqrt{3} + 3)^2$ ， $a = \frac{3}{2}$ 。  
 因此二次函數為  $y = \frac{3}{2}(x+3)^2$ ，  
 令  $x=0$ ，則  $y = \frac{3}{2} \times 9 = \frac{27}{2}$ 。  
 故與  $y$  軸交點坐標為  $(0, \frac{27}{2})$ 。

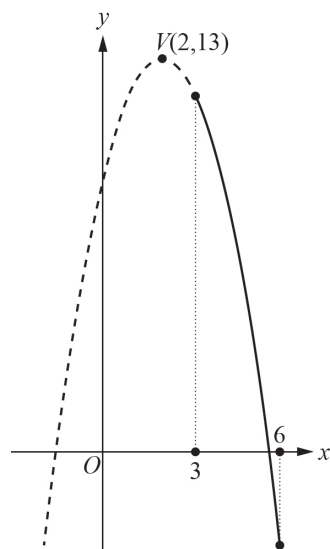
10. (1)  $y = -x^2 + 4x + 9 = -(x-2)^2 + 13$ 。



圖形為實線部分。

可知最大值  $= f(2) = 13$ ，  
 最小值  $= f(5) = 4$ 。

(2) 圖形為實線部分。



可知最大值  $= f(3) = 12$ ，  
 最小值  $= f(6) = -3$ 。



**Note**



**Note**





**Note**



**Note**





**Note**





**Note**