

量子波包之古典行徑

國立彰化師範大學物理研究所

薛哲修、楊淳青

E-mail: phyan@cc.ncue.edu.tw

一、前言

量子力學是從原子和分子開始的微觀世界的理論。作為更精確和更普遍的理論，它也應對宏觀世界適用。而古典力學只是量子力學在涉及的作用量比 \hbar 大得多時的極限情況。從 1925 年量子力學初創時開始，如何能演示一下以上的敘述一直是熱烈的討論和爭議的問題。

從一個簡單的問題說起；量子力學中諧振子本徵態和經典振子的行為極度不同。量子力學諧振子是否具有和古典振子相似的狀態呢？在 1926 年 Schrödinger 從本徵態構成了一個模擬古典振子往復運動的波包。這就是後來人們稱之為相干態 (coherent state) 的特殊狀態^[1]。對於諧振子，這種狀態已經找到了，然而類氫原子中能描述 Kepler 軌道運動的永不擴散的波包迄今尚未找到。

諧振子能級是等間距的，所以波包不擴散，而氫原子的能級卻不是，所以 Schrödinger 並未找出類氫原子中模擬 Kepler 軌道運動的相干態。

另外一方面，按照 Bohr 的對應原理：在大量子數極限下，量子力學系統的行為將逐漸地趨於與經典力學系統相同。所以近年來對於 Rydberg 態 (高量子數 n 的態) 的制備與研究，不論實驗或理論上都是非常活躍的，而且已有長足的進展^[2]。

與古典粒子的軌道運動對應的量子態，絕不是

一個簡單的定態，而只能是由若干定態的相干疊加所構成的非定態。為模擬古典粒子的軌道運動，它們應該是一個在空間運動的較窄的局域波包 (localized wave-packet)。而由許多 Rydberg 態相干疊加形成的波包我們則稱為 Rydberg 波包。

近年來，由於短脈衝雷射技術的進展，已可能在實驗室中產生和檢測各種體系 (電子、分子、半導體量子井等) 中由許多定態相干疊加所形成的定域波包。這種波包的演化和動力學是目前物理和化學很多領域都很感興趣的課題。

從量子力學誕生起，它和古典力學的關係一直是熱門研究的課題。古典力學適用於宏觀系統，粒子運動遵循確定的軌道。量子力學適用於微觀系統，其規律是概率性的。但作為物理學的基本規律，量子力學也應適用於宏觀系統。相干態在量子力學中是一個非常重要的概念，在物理學許多領域都有應用。在本文中，我們將針對諧振子的相干態，以及一些量子體系 (諧振子、無限深方形井、平面轉子、彈跳球，以及類氫原子) 的 Rydberg 波包做一個簡單的介紹，並利用電腦軟體描繪出波包機率密度的行為，比較其與經典粒子行為的相似或相同性。

二、Schrödinger 的諧振子相干態

在創立量子力學的過程中，W. Heisenberg 的

觀點是：類似電子軌道的這類概念應該完全否定；E. Schrödinger 卻更多地考慮量子力學和古典力學間的聯繫。

量子力學中的一維諧振子是很好的例子。在低激發態，粒子的位置機率分布和古典分布差別極大，而當量子數 n 變得相當大時，量子力學分布逐漸接近古典分布，這是 Bohr 對應原理的表現。

但能量本徵態是定態，位置分布是與時間無關的，所以是否能找到模擬古典諧振子運動的量子力學波函數(與時間有關)，也就是能否找出滿足

$$\langle \psi(t) | x | \psi(t) \rangle = A \cos \omega t \quad (1)$$

關係的波函數 $\psi(x, t)$ 。這就是 Schrödinger 在 1926 年解決的問題^[1]。

以下來討論量子力學相干態波包與古典對應的一些性質。假設處於諧振子位能

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad (2)$$

中的粒子在初始時刻 ($t = 0$) 狀態為

$$\psi(x, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} x_0} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-A)^2}{2x_0^2}} \quad (3)$$

A 為振幅， $x_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ 為自然長度，可定義無單位

變數 $\xi = \frac{x}{x_0}$ ， $\xi_m = \frac{A}{x_0}$ 。

將 $\psi(x, 0)$ 用諧振子能量本徵態^[3]展開

$$\psi(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(x) \quad (4)$$

經過計算可得 $C_n = \xi_m^n e^{-\frac{\xi_m^2}{4}} / \sqrt{2^n n!}$ ，然後於各項分別乘上相應的動力學相因子 $e^{-iE_n t / \hbar}$ ，結果就得到符合初始條件(1)，並滿足 Schrödinger 方程的波函數

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(x) e^{-iE_n t / \hbar} \quad (5)$$

將 C_n 代入(5)式可得其機率

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi} x_0} e^{-\left(\xi - \xi_m \cos \omega t\right)^2} \quad (6)$$

並得到位置及動量平均值

$$\langle x \rangle = x_0 \xi_m \cos \omega t = A \cos \omega t \quad (7)$$

與(1)式完全相同

$$\langle p \rangle = \frac{m d \langle x \rangle}{dt} = -\omega A \sin \omega t \quad (8)$$

位能平均值

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{4} \hbar \omega \quad (9)$$

可得位置平方平均值

$$\langle x^2 \rangle = \xi_m^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} \quad (10)$$

由(7) , (10)可得

$$(\Delta x) = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \quad (11)$$

Hamilton 量平均值

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= E = \sum |C_n|^2 E_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi_m^{2n}}{2^n n!} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \\ &= \hbar \omega e^{-\xi_m^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\xi_m^{2n}}{2^n n!} \end{aligned} \quad (12)$$

由 Hamilton 量平均值可以得到能量平均值

$$E = \hbar \omega \left\{ \frac{\xi_m^2}{2} + \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2} k A^2 + \frac{1}{2} \hbar \omega \quad (13)$$

由(9) , (13)可得動能平均值

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{1}{2} \hbar \omega \left\{ \xi_m^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{4} \hbar \omega \end{aligned} \quad (14)$$

動量平方平均值

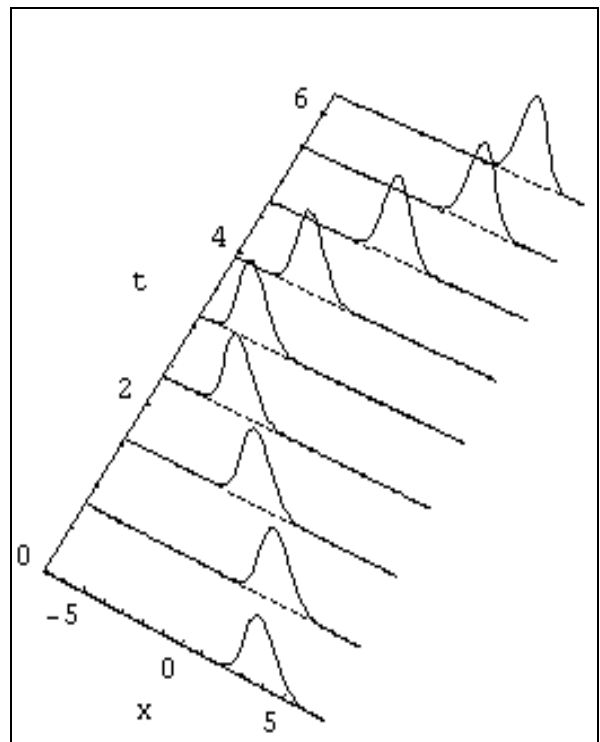
$$\langle p^2 \rangle = m \hbar \omega \left\{ \xi_m^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} \right\} \quad (15)$$

由(8) , (15)可得

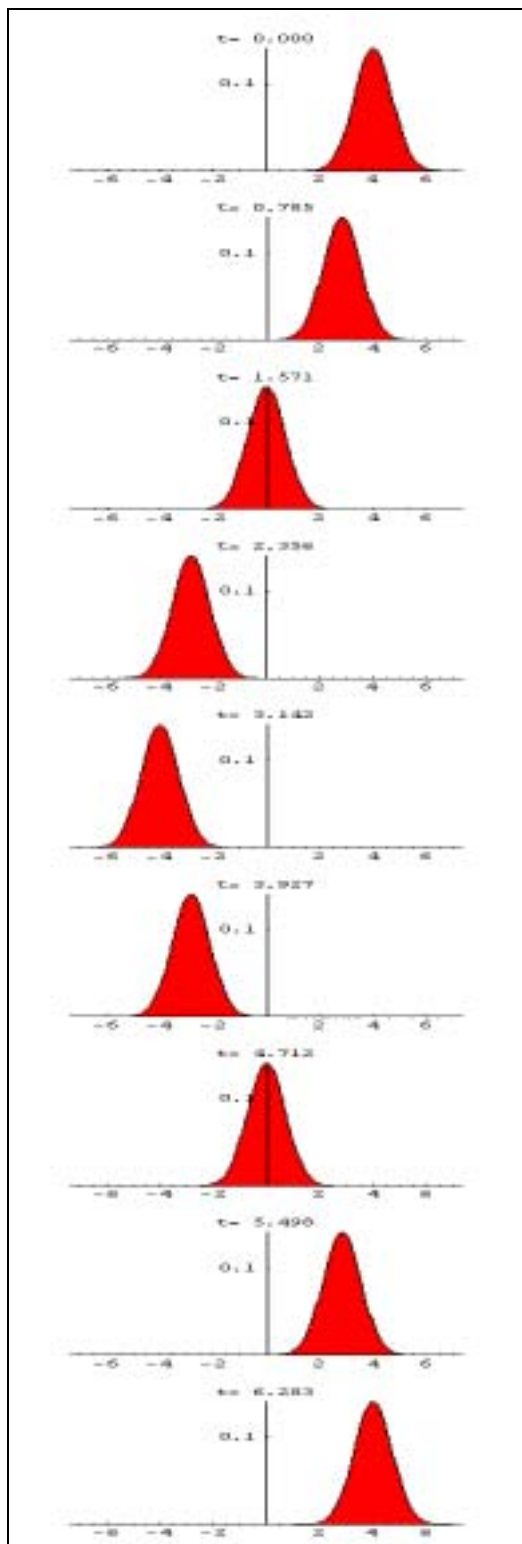
$$(\Delta p) = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{\frac{m \hbar \omega}{2}} \quad (16)$$

由(11) , (16)可得不準度 $\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ 。

從以上的結果可以發現, 諧振子相干態的運動性質與經典振子很相似; 在此狀態下, 諧振子的能量平均值(零點能除外)與經典振子能量相同, 而座標和動量的平均值(即波包中心的位置和動量)隨時間演化的關係也和經典振子完全相同, 並且符合最小的不準度。



圖一: 顯示諧振子相干態是侷限在空間中一個小區域中不擴散的波包。



圖二：諧振子相干態波包在時間 $0 \leq t \leq T_{\text{classical}}$ 的演化情形。

三、Rydberg 波包

一開始 Rydberg 態是用來稱原子或分子中量子數 n 很大的束縛態。而現在對於其他體系中大量子數 n 的束縛態，習慣上也稱為 Rydberg 態。由許多 Rydberg 態相干疊加形成的波包稱為 Rydberg 波包^[4]。

在 \bar{n} 很大的情況下，我們假設組成這個局域波包(Rydberg 波包)的各種定態波函數 φ_n 的比重為高斯分布，波包是對稱的，標準偏差值為 σ (以下所舉的例子 σ 均取為 1.5， \bar{n} 為 25，但類氫原子 σ 取為 2.5， \bar{n} 為 320)，即

$$|C_n|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(n-\bar{n})^2/2\sigma^2} \quad (17)$$

由(17)得知這些定態的能量只有在 \bar{n} 附近貢獻較大。在此我們將能量做泰勒展開可以得到

$$E_n \approx E_{\bar{n}} + E'_{\bar{n}}(n-\bar{n}) + \frac{1}{2}E''_{\bar{n}}(n-\bar{n})^2 + \frac{1}{6}E'''_{\bar{n}}(n-\bar{n})^3 + \dots \quad (18)$$

$$\text{定 義 } T_{\text{classical}} = \frac{2\pi}{|E'_{\bar{n}}|}, \quad t_{\text{revival}} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}|E''_{\bar{n}}|},$$

$$t_{\text{superrevival}} = \frac{2\pi}{\frac{1}{6}|E'''_{\bar{n}}|} \text{ (取自然單位 } \hbar = 1 \text{)}.$$

實際我們有興趣的一些體系(諧振子、無限深方形井、平面轉子、彈跳球，以及類氫原子的 Rydberg 波包)， $T_{\text{classical}} \ll t_{\text{revival}} \ll t_{\text{superrevival}}$ 。保留較低冪次的前三項，忽略掉其他高次項，我們可以將波函數改寫成

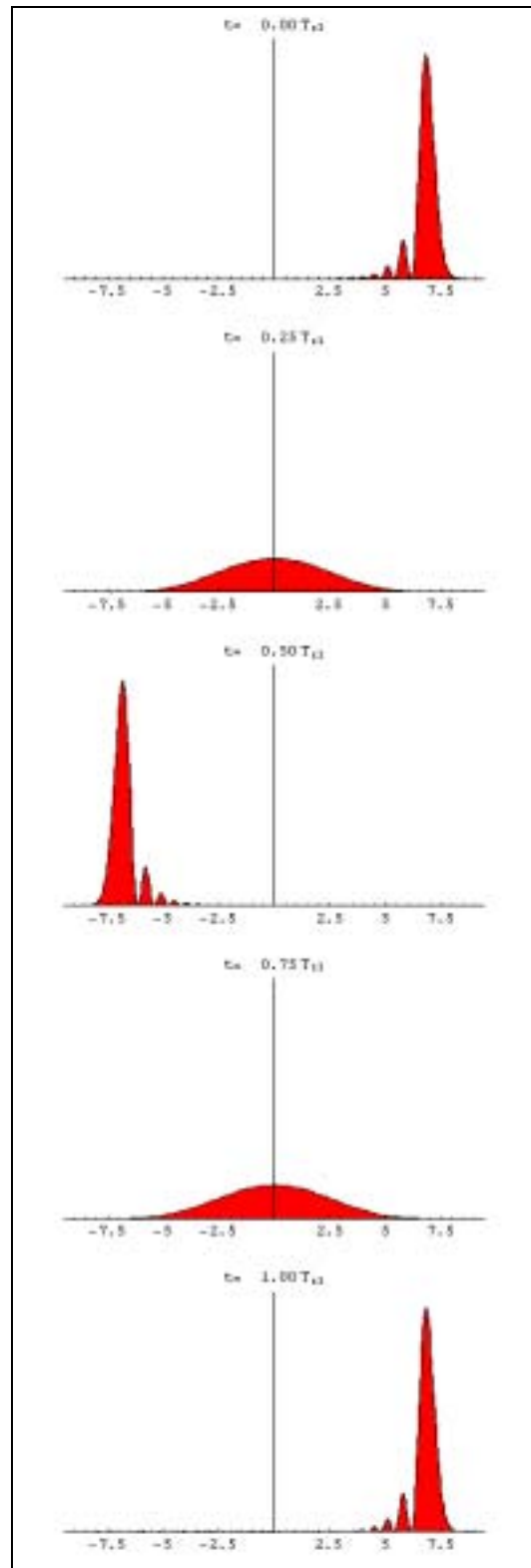
$$\psi(r,t) \approx \sum_n C_n \varphi_n(r) \exp[-2\pi i (\frac{(n-\bar{n})t}{T_{\text{classical}}} + \frac{(n-\bar{n})^2 t}{t_{\text{revival}}} + \frac{(n-\bar{n})^3 t}{t_{\text{superrevival}}})] \quad (19)$$

$T_{\text{classical}}$ 稱為古典週期，在 Rydberg 波包形成後的短時間內(大概只有幾個古典週期)，波包能以近似的保持週期運動(週期 $T_{\text{classical}}$)。長時間之後波包會因為組成之各定態波函數間的相位差而導致波包崩塌(collapse)，而再經過一段時間之後，波包的形狀有可能部分或完全恢復。 t_{revival} 稱為恢復時間， $t_{\text{superrevival}}$ 稱為超恢復時間。這幾個特徵時間的長短與能量隨量子數 n 的變化及波包的組成有關，以下將以幾個常見的體系(諧振子、無限深方形井、平面轉子、彈跳球，以及類氫原子圓軌道的 Rydberg 波包)來說明。

A、諧振子

解 Schrödinger 方程式可以得到能級 $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$ (取自然單位 $\hbar = m = \omega = 1$)， $E'_n = 1$ ， $E''_n = E'''_n = 0$ ，所以 $T_{\text{classical}} = 2\pi$ ， $t_{\text{revival}} = t_{\text{superrevival}} = \infty$ 。

圖三顯示諧振子 Rydberg 波包的演化圖像特別簡單，總是以自然(古典)週期 $2\pi/\omega$ 演化。這種簡單的演化規律是由於諧振子能級分布均勻的結果，而更深層次的根源是來自於諧振子在相空間的旋轉不變性。



圖三：諧振子 Rydberg 波包在時間 $0 \leq t \leq T_{\text{classical}}$ 的演化情形。

圖三是諧振子 Rydberg 波包在時間為一個古典週期 $T_{classical}$ 內運動的情形。波包一開始位於古典簡諧振盪右邊反折點的位置。值得注意的是，Rydberg 波包雖然是局域性的波包，但是因為它不是高斯波包的型式，所以它與相干態波包是不同的。諧振子 Rydberg 波包以週期 $T_{classical}$ 做來回的週期性運動，它的波形是隨時在改變的。諧振子 Rydberg 波包是一個完美的週期性運動，這是因為恢復時間 $t_{revival}$ 無限大所致。

Rydberg 波包 $|C_n|^2$ 成高斯分布，波包會隨時間而崩塌變形，經過一個古典週期 $T_{classical}$ 之後又再度恢復原來的形狀，但這與相干態波包的波形始終保持不變不同。相較之下，相干態波包比 Rydberg 波包的演化規律更為簡單。

B、無限深方形井

粒子在無限深方形井中，

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (20)$$

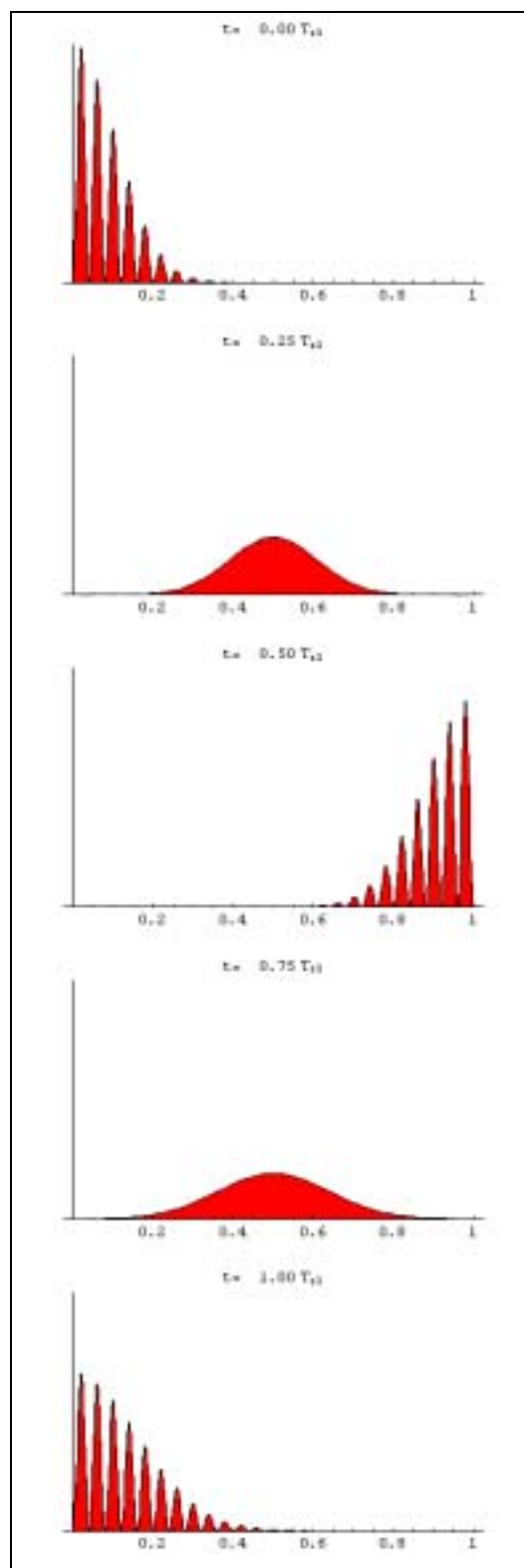
無限深方形井本徵函數^[3]

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (0 \leq x \leq L) \quad (21)$$

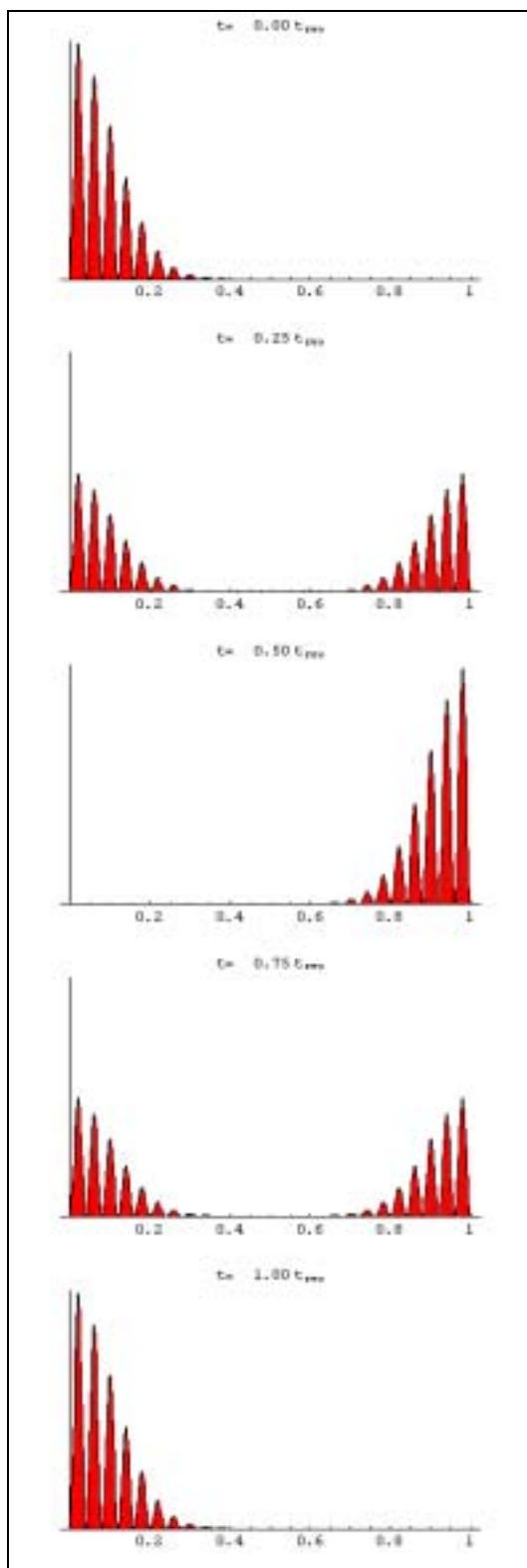
能級 $E_n = \frac{n^2 \pi^2}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (取自然單位

$\hbar = m = L = 1$) , 得到 $T_{classical} = \frac{2}{n\pi}$,

$t_{revival} = \frac{4}{\pi} = 2\bar{n}T_{classical}$, $t_{superrevival} = \infty$ 。



圖四：無限深方形井 Rydberg 波包在時間 $0 \leq t \leq T_{classical}$ 的演化情形。



圖五：無限深方形井 Rydberg 波包在時間 $0 \leq t \leq t_{\text{revival}}$ 的演化情形。

圖四顯示了無限深方形井中波包演化的情形。時間等於 0 時，波包位於左邊原點附近，這時的波包呈現劇烈振盪的形狀，這是來自於左邊無窮大的位能壁的衝擊，同理，當時間為 $T_{\text{classical}}/2$ ，以及 $T_{\text{classical}}$ 時也是如此。而當波包遠離位能壁的時候，波包呈現平滑的形狀，這是由於此時粒子為自由移動粒子的緣故。另外從圖四亦可以發現經歷一個古典週期 $T_{\text{classical}}$ 後，波包已經從井的左邊跑到右邊，然後再度回到左邊，完成一個迴路，但此時波包形狀只是大致恢復原狀，並沒有完全恢復，這與諧振子只需一個古典週期波包就恢復原來形狀的情形不同。

圖五可以發現無限深方形井的 Rydberg 波包一直到時間等於 t_{revival} 時波包的形狀才完全恢復，這也是因為超恢復時間 $t_{\text{superrevival}}$ 無限大的關係。

C、平面轉子

量子力學體系中，平面轉子能級與波包恢復情形與一維的無限深方形井很類似。平面轉子的 Hamilton 量

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}_z^2}{2I} \quad (22)$$

\hat{L}_z 為角動量， I 為轉動慣量（取自然單位 $\hbar = I = 1$ ）。

平面轉子本徵函數

$$\varphi_n(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\phi} \quad (23)$$

能級為 $E_n = n^2/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$, 二重簡併 ($n = 0$ 除外)。得到

$$T_{\text{classical}} = 2\pi/\bar{n} ,$$

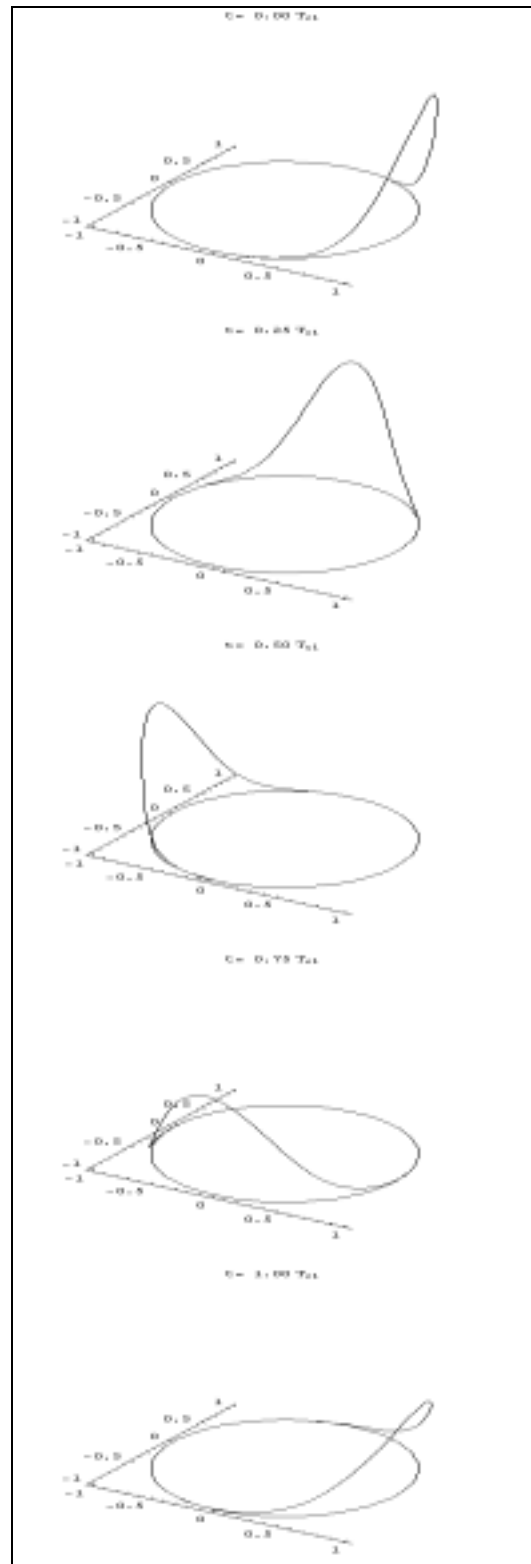
$$t_{\text{revival}} = 2\bar{n}T_{\text{classical}} ,$$

$$t_{\text{superrevival}} = \infty .$$

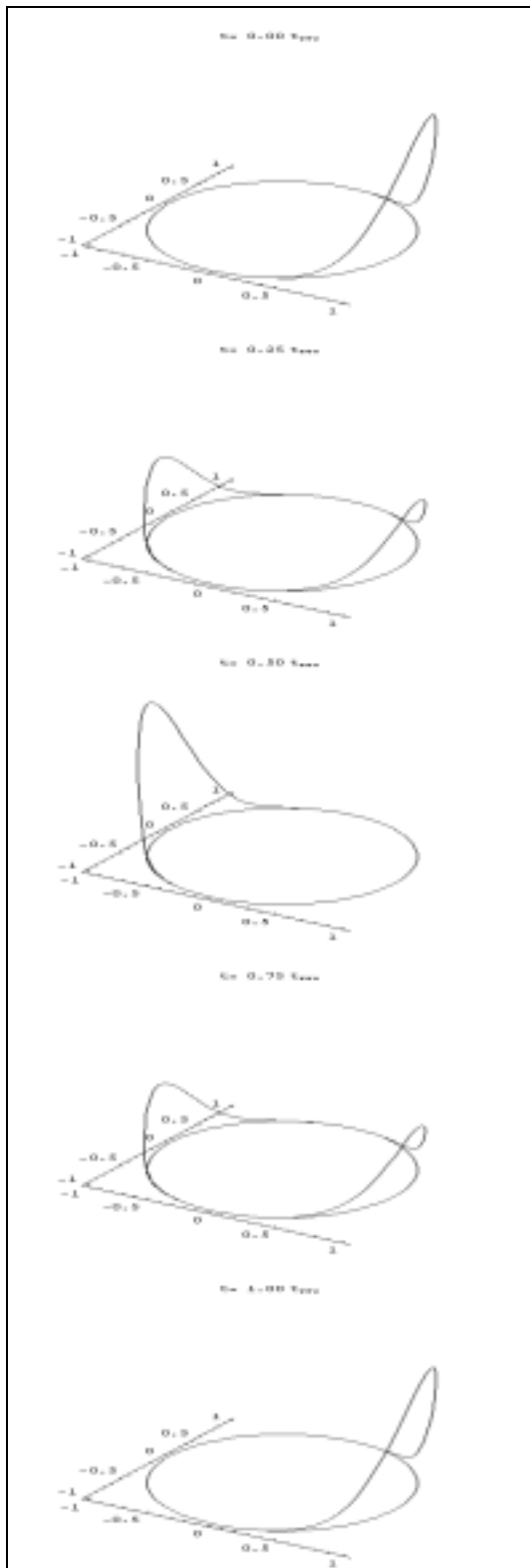
其 Rydberg 波包演化的情形與無限深方形井類似；在經歷一個 $T_{\text{classical}}$ 後波包形狀大致恢復，經歷 $\frac{1}{2}t_{\text{revival}}$ 後波形更接近原來形狀，在 $t = t_{\text{revival}}$ 時波包將完全恢復，同樣的，這也是因為超恢復時間 $t_{\text{superrevival}}$ 無限大的關係。

比較圖三、圖四，與圖五、圖六可以發現，二維平面轉子與一維無限深方形井很相似；因為能級都是與量子數 n 二次方成正比，所以能量三階以上的導數均嚴格為 0 (也就是超恢復時間 $t_{\text{superrevival}}$ 無限大)，所以平面轉子與無限深方形井在經歷一個 $T_{\text{classical}}$ 後波形都只是部分恢復，而要經歷一個 t_{revival} 之後才完全恢復。

事實上不論是無限深方形井還是平面轉子，只要時間經過 $t_{\text{revival}}/2$ 後波形就會完全恢復(無限深方形井在時間等於 0 與時間等於 $t_{\text{revival}}/2$ 時波包左右顛倒)，不同於初始狀態的是這時波包在空間中的位置與初始位置不同，它位於與初始位置對稱的位置上。所以我們稱之為恢復時間的 t_{revival} ，不僅僅是波包形狀恢復而已，而是連帶空間中的位置都要完全恢復。



圖六：平面轉子 Rydberg 波包在時間為一個古典週期的演化情形。



圖七：平面轉子 Rydberg 波包在時間為一個恢復週期的演化情形。

D、彈跳球

考慮一個質量為 m 的粒子在地球表面附近的均勻重力場中垂直上下運動。假設與地球的碰撞是彈性的，且取地球表面為座標原點，以及位能的零點。因此粒子在此均勻重力場中的位能為

$$V(x) = \begin{cases} mgx & x > 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases} \quad (24)$$

考慮一個能量為 $E(>0)$ 的粒子的運動。按照古典力學來看，粒子能達到的高度為 $x_0 = E/mg$ ， $x > x_0$ 為古典不允許區域， $0 < x \leq x_0$ 為古典允許區域。現在我們用量子力學來處理，並討論其與古典力學的關係。

邊界條件為

$$\psi(0) = 0 \quad (25)$$

$$\psi(\infty) = 0 \quad (26)$$

(25)式表示地球表面相當於一個無限高的位壘，粒子不能鑽進地表。(26)則為束縛態的邊界條件，表示粒子不能跳到無窮高。

不含時間的 Schrödinger 方程為

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi_n(x)}{dx^2} + (mgx - E_n) \varphi_n(x) = 0 \quad (27)$$

定義特徵長度 $l_g = \left(\frac{\hbar^2}{2m^2 g} \right)^{1/3}$ 特徵時間

$$t_g = \left(\frac{2\hbar}{mg^2} \right)^{1/3}, \text{ 得到無單位變數 } x' = x/l_g,$$

$x_n = E_n/(mgl_g)$ ，則 (27) 式可化簡為

$$\frac{d^2 \psi_n}{dx'^2} - (x' - x_n) \psi_n = 0 \quad (28)$$

上述(28)式的解為 Airy function^[5] $Ai(x' - x_n)$ 或者是 $Bi(x' - x_n)$ 。因為 Airy function Bi 在無窮遠處發散，所以彈跳球問題的本徵函數

$$\varphi_n(x') = N_n Ai(x' - x_n) \quad (29)$$

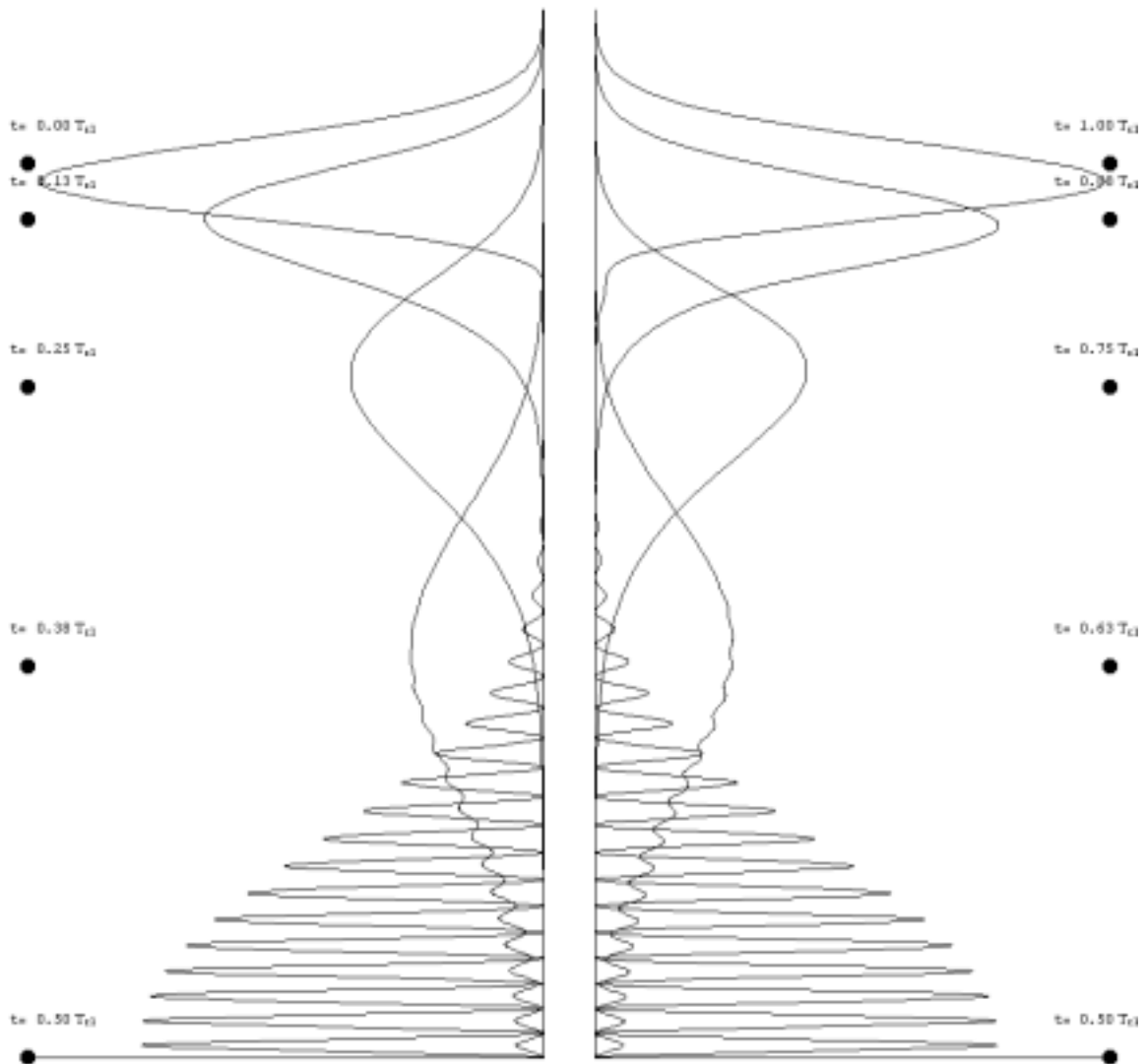
N_n 為歸一常數。由邊界條件(25)式得知 $Ai(-x_n) = 0$ ， x_n 為 Airy function Ai 的節點位置。在大量子數 n 的情況下卻可以得到相當準確的近

似解

$$x_n \approx \left[\frac{3\pi}{2} \left(n - \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3} \quad (30)$$

$$N_n \approx \left[\frac{2\pi^2}{3(n-1/4)} \right]^{1/6} \quad (31)$$

由(30)式可以求得 $T_{classical} = 2 \left[\frac{3\pi}{2} \left(\bar{n} - \frac{1}{4} \right) \right]^{1/3}$ (單位 t_s)。



圖八：彈跳球 Rydberg 波包中心與古典彈跳球軌跡左邊為時間 $0 \leq t \leq T_{classical}/2$ 的演化情形，右邊為時間 $T_{classical}/2 \leq t \leq T_{classical}$ 的演化情形。

不同於前面的幾個例子(諧振子、無限深方形井、平面轉子),彈跳球能級的高階導數(三階以上)並不嚴格為 0,這將導致波包難以完全恢復。

圖八左邊為描述半個古典週期(從開始落下至地面的時間),黑點為古典彈跳球運動軌跡相對於同時刻彈跳球 Rydberg 波包的位置。

圖八右邊為描述後半個古典週期(從地面反彈到最高點的時間),黑點為古典彈跳球運動軌跡相對於同時刻彈跳球 Rydberg 波包的位置。

可以發現波包中心位置的確與古典彈跳球的軌跡相同。圖中因為波包並非高斯波包這種對稱的型式,所以古典軌跡點對應到的並非波包的峰點位置,而是位於波包峰點偏上的位置。

有關彈跳球 Rydberg 波包與時間有關一些物理量的平均值的計算因計算繁雜,在此我們並不贅述。

E、類氫原子圓軌道波包

Schrödinger 在 1926 年文章中提到,氫原子中電子的運動軌道也可以用類似諧振子的辦法處理,即用疊加能量本徵態得到的量子力學波包來模擬。但在 1929 年他寫給 Lorentz 的信中說他在這個問題上遇到極大的計算上的困難,此後就沒再提起這件事了。

分析一下諧振子波包的構成,就不難明白構成氫原子 Kepler 軌道波包的困難。(5)式是嚴格的週期函數,它在經過一個週期 $T = 2\pi/\omega$ 或其整數倍後總要恢復原狀。這是由於動力學相因子是 $e^{-i(E_n/\hbar)t} = e^{-i(n+1/2)\omega t}$,對 n 求和的疊加不會改變其週期性。這只是在諧振子能級隨 n 的變化是嚴格線性的,即各能級是等距的情況下才會出現。氫原子

的能級不是等距的,特別對低激發態更是如此。要想模擬電子在類氫原子中軌道的量子力學波包,只能利用很高激發態的能級。

量子力學氫原子波函數最接近圓軌道的是 $n, l = n-1, m = \pm(n-1)$ 這些定態。 $l = n-1$ 的氫原子本徵函數在徑向上沒有節點, $l, m = \pm l$ 的球諧函數有 $(\sin \theta)^l$ 因子,使本徵函數在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ (xy 平面)有極大值, $m = +l, m = -l$ 由於相應波函數為 $e^{\pm il\phi}$,可以和動力學相因子配合作為正反向運動的波包。

以下由於篇幅的關係我們只將類氫原子圓軌道波包(m 只取正值)的演化情形以圖表現出來,其中相關的一些繁雜計算就省略不表。

類氫原子能級 $E_n = -\frac{Z^2}{2n^2}$, (採用自然單位,

而且取 $Z = 1$), 因此我們可以得到

$$T_{Kepler} = T_{classical} = 2\pi n^3, \quad t_{revival} = \frac{\bar{n}}{3} T_{Kepler}。$$

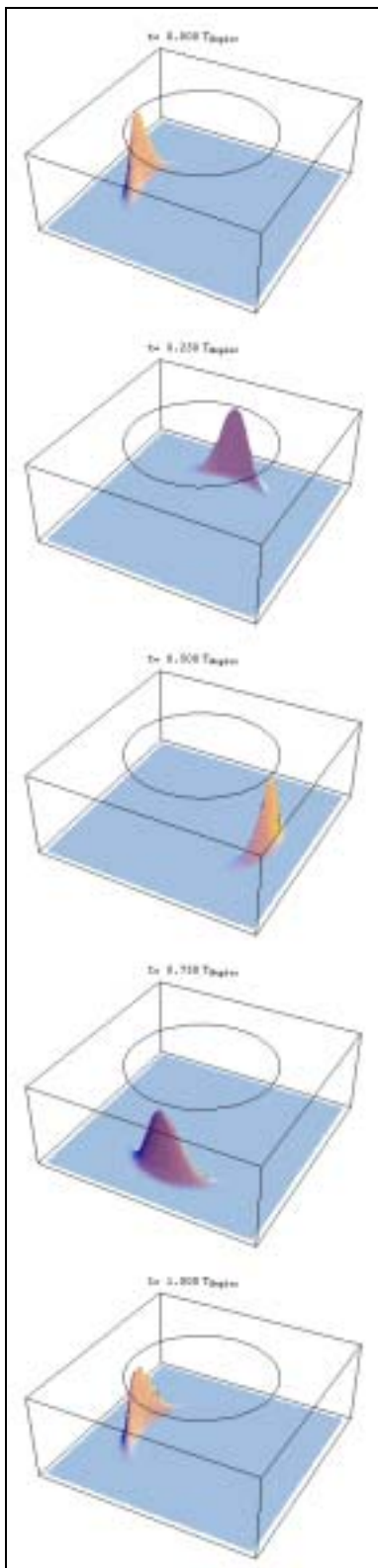
圖十一上方有一個圖,此即束縛在庫侖位能之古典粒子的圓形運動軌跡,半徑等於徑向座標 r 的平均值。

$$\bar{r} = \frac{1}{2} [3n^2 - l(l+1)]a \quad (32)$$

$l = n-1$, 代入 (32) 式

$$\bar{r} = n^2 + \frac{n}{2} \quad (\text{取自然單位 } a=1) \quad (33)$$

圖十一中圓的高度為在時間為 0 時波包的最高點。可以發現,經過一個古典週期之後,



圖十一：類氫原子圓軌道波包在時間 $0 \leq t \leq T_{\text{classical}}(T_{\text{Kepler}})$ 的演化情形。

波包最高點與圖中的圓高度已經有落差了，這就代表了波包隨著時間而擴散了。另外我們也可以從圖中發現，圓軌道波包中心運動的速率是等速的，經過四分之一古典週期就繞了 $\pi/4$ ，與古典的情形相符。

四、結果與討論

相干態是由無窮多個佔有數本徵態的一種特殊的相干疊加，其易於展現粒子之間的合作行為 (cooperative behavior)。

在 60 年代，相干態這個概念被廣泛的應用於量子光學等領域。Glauber^[6] (首先提出相干態這個名詞)、Klauder，及 Sudarshan^[7] 等廣泛地應用相干態來處理光場的相干性質和光子統計學。

儘管相干態已經有如此廣泛的應用，但在一般量子力學教材中卻很少提到，較系統的介紹往往只能從一些專著中去尋找，所以文章中，我們為量子力學相干態這個概念作初步的介紹。

關於文章主體的第二部分，以氫原子為例，對於 $n \geq 100$ 的 Rydberg 態， $\bar{r} \geq 10^4 a \sim 0.5 \mu m$ ，已經接近宏觀尺度了。因此，Rydberg 態最適合用來研究微觀世界和宏觀世界的聯係，或者量子力學與古典力學的關係。Rydberg 波包也符合 Bohr 的對應原理； \bar{n} 越大波包擴散的情形越不明顯，而且波包中心運動的軌跡也與古典的情形相符。

文章中介紹了一般處理局域性波包演化及恢復的方法：1. 對於局域性波包我們認為疊加組成波包的各定態是緊密的分布在量子數平均值 \bar{n} 附近(可由短脈衝雷射技術製造出)。2. 我們假設波包組成成分((17)式)為高斯分布(只是為了簡化計算，並不影響所得出的定性結論)。3. 引進了三個

時間尺度 $T_{\text{classical}}$ 、 t_{revival} 、 $t_{\text{superrevival}}$ 來控制波包的演化與恢復。

我們分析了幾個不同的量子力學體系的局域性波包的演化與恢復；諧振子波包具有完美週期 ($T_{\text{classical}}$) 運動，無限深方形井波包、平面轉子波包經歷 t_{revival} 完全恢復，以及不會完全恢復的彈跳球波包、類氫原子圓軌道波包。只要給定該量子體系的能級，我們就可以預測其局域性波包恢復的情形。解析這種波包的演化及動力學性質在物理及化學領域都有很多的應用。

參考資料：

- [1] E Schrödinger *Naturwissenschaften*, 14 (1926), 664 .
- [2] M Nauenberg , Stroud C , Yeazell J. *Scientific*

American , 1994 , N , p.24 .

- [3] *Quantum Mechanics* , Eugen Merzbacher.
- [4] R. Bluhm , A. Kosteletzky , and J. A. Porter , *Am. J. Phys.* , 64 (1996) , 944 , The evolution and revival structure of localized quantum wave packets.
- [5] M. Abramowitz and I. A. Stegun (eds) , *Handbook of Mathematical Function* (Dover , New York , 1972) , Sec. 10.4 .
- [6] R. Glauber , *Phys. Rev.* , 131 (1963) 2769 .
Dewitt C al. *Quantum Optics and Electronics* (New York , Gordon & Breach , 1964) .
- [7] J. R Klauder & Sudarshan , E. C. G. *Fundamentals of Quantum Optics* , New York , Benjamin , 1968 .