

2003 年第四屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第三十四屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

- 如圖 1 所示，在一光滑水平面上，靜置有一質量為 M 的均勻長方體。一質量為 m 、長與寬均可忽略的小鋁塊，在此長方體的上表面，於時刻 $t=0$ 時，由左端沿中線(虛線)以水平初速 u 開始向右滑行，最後停止在長方體的一半長度處。已知小鋁塊與長方體之間的動摩擦係數為 μ ，又重力加速度為 g ，假設兩物體與外界之間並無熱量的交換，回答下列問題：
 - 小鋁塊滑行到達長方體一半長度的時刻 τ 為何？
 - 在 $t=0$ 至 τ 的期間，小鋁塊和長方體滑行的距離各為何？
 - 長方體的長度 L 為何(以已知量表示之)？
 - 在 $t=0$ 到 τ 的期間，摩擦力對小鋁塊和長方體所做的功，其總和為何？
 - 在 $t=0$ 到 τ 的期間，小鋁塊和長方體系統的內能共增加多少？

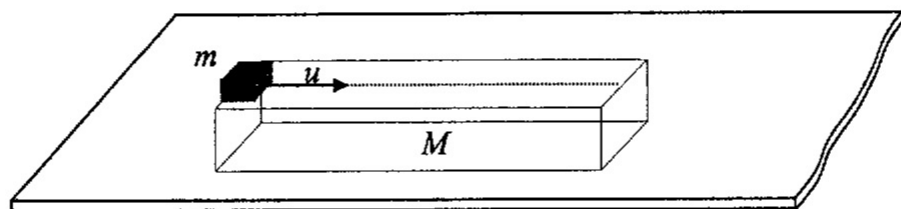


圖 1

- 為了將太空船從地球送至火星，可利用火箭引擎的推力，先使太空船脫離地球引力的束縛，進入地球繞著太陽公轉的圓軌道；然後再進入一個以太陽為焦點的橢圓形轉換軌道。若此橢圓軌道能和火星繞太陽公轉的圓軌道相交，且太空船和火星能同時到達相交點，則太空船就有可能登陸火星。圖 2 所示的轉換軌道，稱為 Hohmann 轉換。此種轉換所需的能量最少，因此所需耗用的燃料也最少。燃料只須在轉換軌道的開始及結束時使用。太空船在橢圓轉換軌道上運動時，遵循克卜勒定律，不需耗用燃料。在解答本題時，可忽略太空船與其它行星(包含地球)之間的作用力，並假設地球和火星繞太陽公轉的軌道皆為圓軌道，且軌道面位在同一平面上。已知下列的物理量：

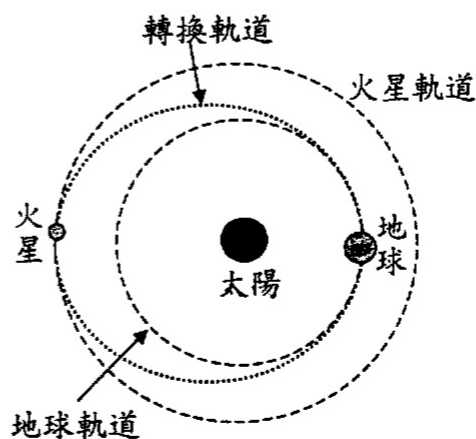


圖 2

萬有引力常數 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}$

太陽質量 $M_s = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

地球的公轉週期 $T_E = 365 \text{ 天}$

地球至太陽的距離 $r_E = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$

火星至太陽的距離 $r_M = 2.28 \times 10^{11} \text{ m}$

(a) 火星繞太陽公轉的週期約為多少天？

(b) 證明質量為 m 的行星，繞太陽作橢圓軌道運動的總力學能 $E = -\frac{GmM_S}{2a}$ ，式中 a 為半長軸。

就 Hohmann 的轉換軌道，回答下列問題：

(c) 太空船從地球繞著太陽公轉的圓軌道，轉換至橢圓形轉換軌道，其速率的改變量為多少？

(d) 太空船從地球發射至到達火星，至少需時多久？

(e) 若欲登陸火星，則太空船應於火星對太陽，以及地球對太陽的兩連線之間的夾角為多少時，自地球發射？

(f) 從火星返回地球時，太空船應於火星對太陽，以及地球對太陽的兩連線之間的夾角為多少時，自火星發射？

(g) 太空船自地球至火星往返一次，至少約需時多少天？

3. 圖 3-1 所示的網狀電路，由 N 個相同的電阻 R_A 和 N 個相同的電阻 R_B 所組成， N 值很大。電路的左端連接一電壓為 V_0 的電源，回答下列問題：

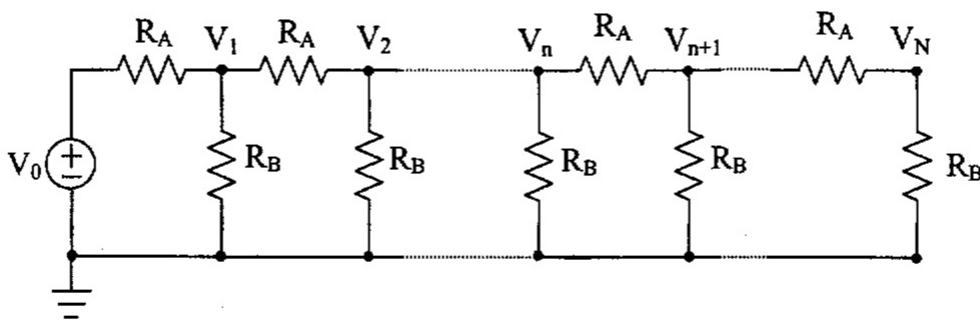


圖 3-1

(a) 證明 V_{n+1} 、 V_n 、和 V_{n-1} 之間有下列的關係式：

$$V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1} = \left(\frac{R_A}{R_B} \right) V_n$$

(b) 從電路圖中可看出 V_n 隨 n 的增加而遞減，因此可試著檢測 $V_n = V_0 e^{-na}$ 是否滿足(a)題中的關係式？若可，則 a 值應為何？

(c) 若 $\frac{R_A}{R_B} \ll 1$ ，則當 n 為何值時， $V_n = \frac{1}{e} V_0$ ？

(d) 若 $R_B = 2R_A$ ，證明 $V_n = \left(\frac{1}{2^n} \right) V_0$ 。

(e) 上述的電路模型可應用於生物物理的研究。唾腺或腎小管的單層上皮細胞的結構如圖 3-2 所示。單一細胞的電阻為 R_B ，兩相鄰細胞間的接面電阻為 R_A ，細胞的形狀約為邊長 $10\mu\text{m}$ 的正方形。以電極在第一個細胞和其外的細胞液之間施加一電壓 V_0 ($=30\text{mV}$)，然後依次測量各個細胞和其外細胞液之間的電壓 $V(x)$ ，所得

的實驗數據如圖 3-3 所示。利用圖中的數據，求出 R_A/R_B 的比值。

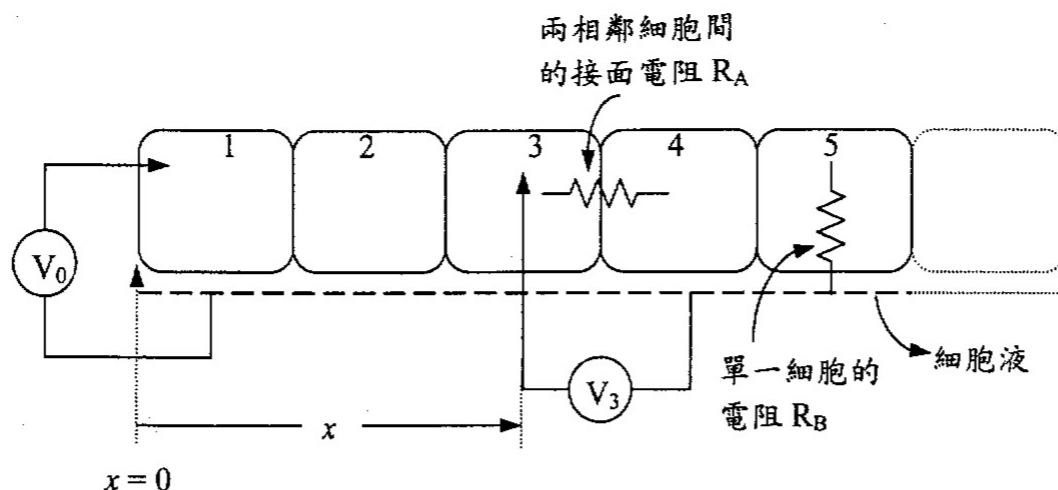


圖 3-2

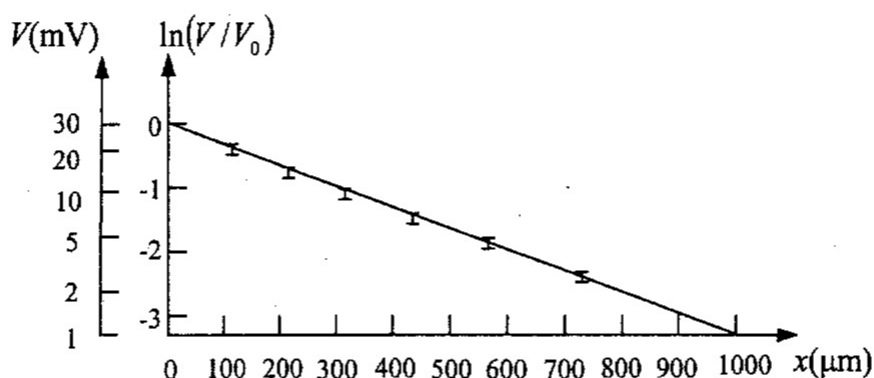


圖 3-3

4. 有兩條電阻線 CD 和 EF (長度皆為 a ，電阻皆為 R)，與兩條導線 CE 和 DF (長度皆為 b ，電阻為零) 構成一長方形的封閉電路 $CDFE$ 。此電路放置在 xy 平面上，此迴路受一外力推動，以等速度 v 沿 $+x$ 方向運動，如圖 4-1 所示。在 $x > 0$ 的區域，外加有一向上垂直於紙面的均勻磁場 B 。在本題中，沿 $+y$ 方向流動的電流取為正值，反方向取為負值；當電阻線 CD 通過 $x = 0$ 的瞬間取為 $t = 0$ ；封閉電路的感應電流所產生的磁場影響可以忽略。回答下列問題：

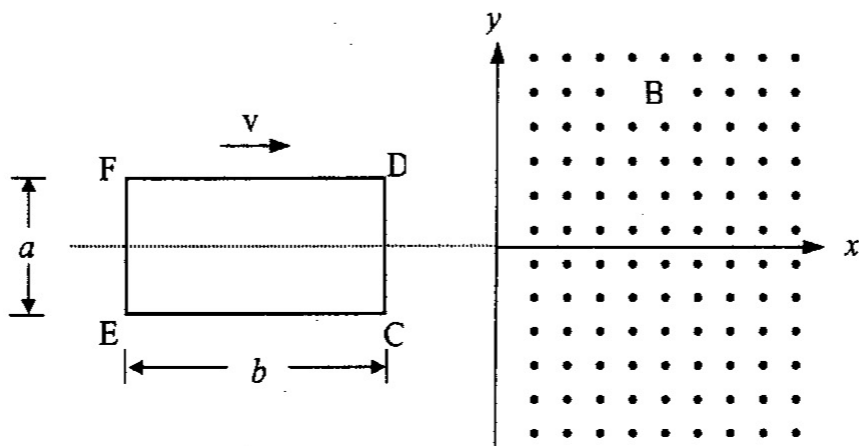


圖 4-1

(a) 試求通過 CD 的感應電流 I_{CD} 隨著時間 t 的變化關係式，並畫出 I_{CD} 對 t 的關係曲線。

今若在封閉電路未進入磁場區之前，另以一電阻線 GH (長度為 a ，電阻為 R)，連接兩導線的中點，如圖 4-2 所示。

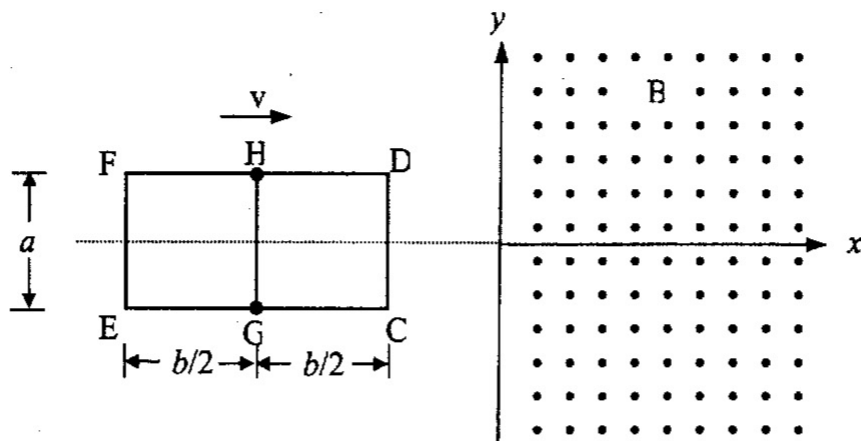


圖 4-2

(b) 試分別求出流過每一條電阻線的電流隨時間 t 的變化關係式，並繪出 I_{CD} 、 I_{EF} 和 I_{GH} 對 t 的關係曲線。

(c) 求此封閉電路所受的外力 F 隨時間 t 的變化關係式。

(d) 證明外力 F 對此一封閉電路所作的功，等於迴路中電流所產生的熱量。

5. 圖 5-1 所示為由三層透明薄膜作成的平面波導，中間夾層的折射率為 n_i ，厚度為 h ，兩外層的薄膜折射率皆為 n_e ，且 $n_e < n_i$ 。參考坐標系的 y 軸平行於薄膜平面的法線方向， x 軸和 z 軸則分別平行於薄膜平面。入射在中間夾層內的光波，以全反射的方式傳播。每一次反射後，光波的相位角增加 ϕ_r 。光

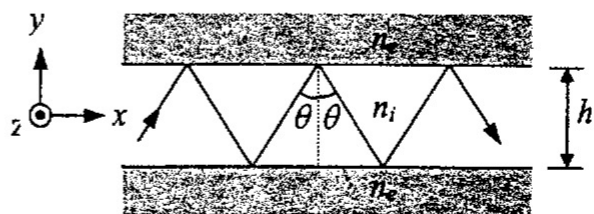


圖 5-1

波的傳播路徑在 x - y 平面上，以折線方式沿波導的 $+x$ 方向前進。回答下列問題：

- (a) 欲使光波在中間夾層的介質內發生全反射，其入射角 θ 的最小值為何？
 (b) 光波傳播效率最佳的入射角為何？

【提示】：參看圖 5-2，光波在波前 FC 上的各點，即 F 、 E 、 A 、 D 、...、 C ，皆同相位。考慮在 A 點的光波，經 B 點和 C 點兩次反射後，亦將由原先波前所在的 C 點出發，與新波前 FC 疊加。若上述所經光程的相位差恰為 2π 的整數倍，則將呈現建設性干涉，在這種情況下的傳播效率最佳。

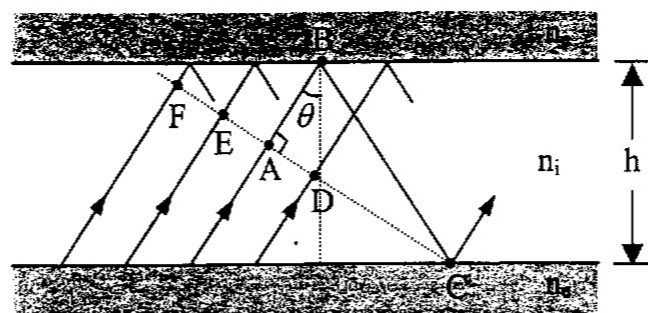


圖 5-2

(c)如果傳播效率最佳的不同入射角，可作為不同的傳播模式，則波長為 $1.0\mu\text{m}$ 的光波，在下表所示的波導中可有多少種傳播模式？

$n_i=3.5$	$n_e=3.0$	$\phi_r(\theta)=0.5\pi(1-e^{-(\theta-\theta_c)})$	$h=6.0\mu\text{m}$
-----------	-----------	---	--------------------

6. 有一熱機在兩個完全相同的物體，A 和 B，之間運轉，這兩個物體的溫度分別為 T_A 和 T_B ($T_A > T_B$)。每一個物體的質量和比熱各為 m 和 s 。今假設這兩個物體均維持在定壓下，且不會發生相變。

- (a)若熱機在此系統中運轉時，可輸出理論上可得的最大功，則 A 和 B 兩物體的最終溫度 T_0 為何？
 (b)求此熱機所可能輸出的最大功。

今設此熱機在兩個水箱之間運轉，每個水箱的體積均為 2.50m^3 ，但其中一個水箱的溫度為 350K ，另一為 300K 。回答下題：

- (c)計算此系統可能得到的最大的力學能。

【註】：已知水的比熱 $= 4.19 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ，水的密度 $= 1.00 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ 。