

大學入學考試中心
九十七學年度指定科目考試試題
數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內劃記。修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液。

第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，請在規定之欄位以較粗的黑色或藍色原子筆、鋼珠筆或中性筆作答，並標明題號。

第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

(一) 單選題及多選題：只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 -, ± 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列 ₃ 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄												
1	1	2	<input checked="" type="checkbox"/>	4	5	6	7	8	9	0	-	±

例：若第 5 題為多選題，正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 5 列的 ₁ 與 ₃ 劃記，如：

5	<input checked="" type="checkbox"/>	2	<input checked="" type="checkbox"/>	4	5	6	7	8	9	0	-	±
---	-------------------------------------	---	-------------------------------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---

(二) 選填題的題號是 A, B, C, ..., 而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 ₋ 與第 21 列的 ₇ 劃記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	<input checked="" type="checkbox"/>	±
21	1	2	3	4	5	6	<input checked="" type="checkbox"/>	8	9	0	-	±

祝考試順利

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共佔 74 分）

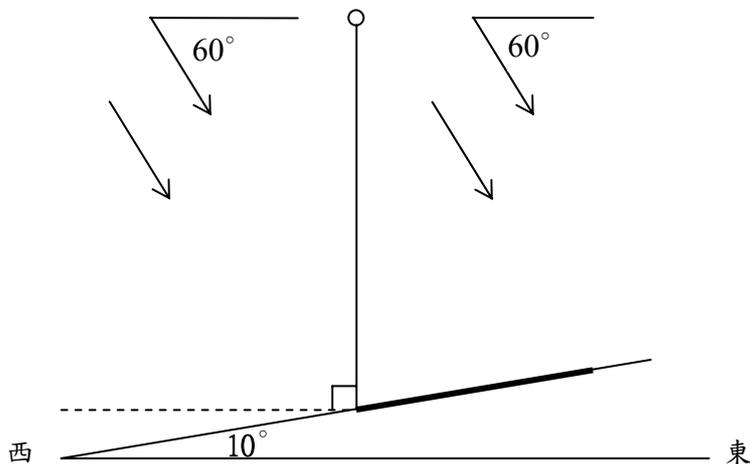
一、單選題（12 分）

說明：第 1 至 2 題為單選題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題答對得 6 分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣 1.5 分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未作答者，不給分亦不扣分。

1. 已知正整數 n 可以寫成兩個整數的平方和。試問 n 除以 8 的餘數不可能為以下哪一選項？

- (1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 5 (5) 6

2. 在與水平面成 10° 的東西向山坡上，鉛直（即與水平面垂直）立起一根旗竿。當陽光從正西方以俯角 60° 平行投射在山坡上時，旗竿的影子長為 11 公尺，如下圖所示（其中箭頭表示陽光投射的方向，而粗黑線段表示旗竿的影子）。



試問旗竿的長度最接近以下哪一選項？

- (1) 19.1 公尺 (2) 19.8 公尺 (3) 20.7 公尺 (4) 21.1 公尺 (5) 21.7 公尺

參考數值：

$$\sin 10^\circ \approx 0.174, \quad \sin 20^\circ \approx 0.342, \quad \cos 10^\circ \approx 0.985, \quad \cos 20^\circ \approx 0.940, \quad \sqrt{3} \approx 1.732.$$

二、多選題（48 分）

說明：第 3 至 8 題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 1.6 分，每答錯一個選項，倒扣 1.6 分，完全答對得 8 分；整題未作答者，不給分亦不扣分。在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 1.6 分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

3. 設 A 為坐標平面上代表旋轉某個角度的二階方陣，且已知 $A^6 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。試問 A 可能是以下哪些選項中的方陣？

(1) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} \cos \frac{5\pi}{3} & -\sin \frac{5\pi}{3} \\ \sin \frac{5\pi}{3} & \cos \frac{5\pi}{3} \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} \cos \frac{5\pi}{6} & \sin \frac{5\pi}{6} \\ -\sin \frac{5\pi}{6} & \cos \frac{5\pi}{6} \end{bmatrix}$

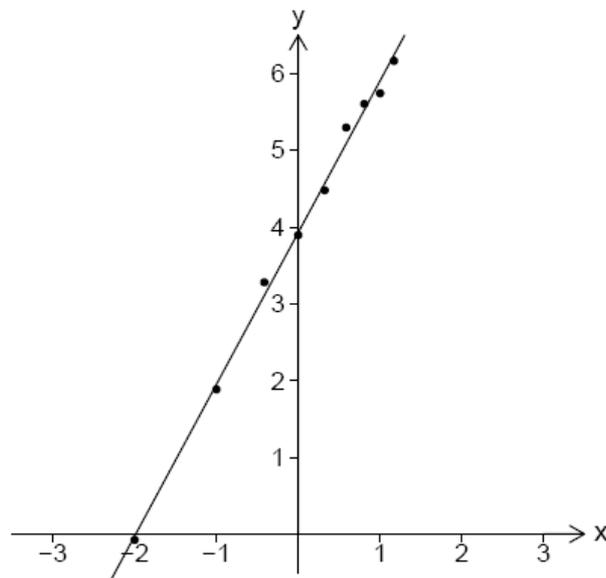
4. 甲、乙、丙三人參加一投擲公正銅板的遊戲，每一局三人各擲銅板 1 次；在某局中，當有一人投擲結果與其他二人不同時，此人就出局且遊戲終止；否則就進入下一局，並依前述規則繼續進行，直到有人出局為止。試問下列哪些選項是正確的？

- (1) 第一局甲就出局的機率是 $\frac{1}{3}$
- (2) 第一局就有人出局的機率是 $\frac{1}{2}$
- (3) 第三局才有人出局的機率是 $\frac{3}{64}$
- (4) 已知到第十局才有人出局，則甲出局的機率是 $\frac{1}{3}$
- (5) 該遊戲在終止前，至少玩了六局的機率大於 $\frac{1}{1000}$

5. 某人進行一實驗來確定某運動之距離 d 與時間 t 的平方或立方成正比，所得數據如下：

時間 t (秒)	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25
距離 d (呎)	0.95	3.69	9.71	14.88	22.32	39.34	48.68	53.65	71.79

為探索該運動的距離與時間之關係，令 $x = \log_2 t$ ， $y = \log_2 d$ ，即將上述的數據 (t, d) 分別取以 2 為底的對數變換，例如： $(2, 53.65)$ 變換後成為 $(1, 5.74)$ 。已知變換後的數據 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_9, y_9)$ 之散佈圖及以最小平方方法所求得變數 y 對變數 x 的最適合直線（或稱迴歸直線）為 $y = a + bx$ ，如下圖所示：



試問下列哪些選項是正確的？

- (1) 若 $d = 14.88$ ，則 $3 < \log_2 d < 4$
- (2) x 與 y 的相關係數小於 0.2
- (3) 由上圖可以觀察出 $b > 2.5$
- (4) 由上圖可以觀察出 $a > 2$
- (5) 由上圖可以確定此運動之距離與時間的立方約略成正比

6. 設 n 為正整數，方程式 $x^2 - 2x - n = 0$ 的兩根為 a_n 與 b_n ，且 $a_n > b_n$ 。試問下列哪些選項是正確的？

(1) $a_n > 0$ 對所有 n 皆成立

(2) $a_n + b_n = 2$ 對所有 n 皆成立

(3) $b_{n+1} > b_n$ 對所有 n 皆成立

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n a_{n+1}}{n} = 1$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{\sqrt{n}} = 2$

7. 設 $f'(x)$ 表示實係數多項式函數 $f(x)$ 的導函數，已知 $y = f'(x)$ 的圖形是一個通過點 $(1, 0)$ 和點 $(2, 0)$ 且開口向上的拋物線。試問下列哪些選項是正確的？

(1) $f(x)$ 一定是三次多項式

(2) $f(x)$ 在 $1 < x < 2$ 的範圍內必為遞增

(3) $f(x)$ 一定恰有兩個極值

(4) $f(x) = 0$ 一定有三個實根

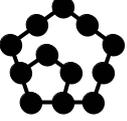
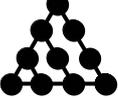
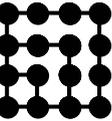
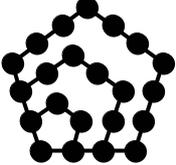
(5) $f(x) = 0$ 在 $1 \leq x \leq 2$ 的範圍內一定有實根

8. 在坐標平面上，設拋物線 Γ 通過點 $(8, 4)$ ，且其對稱軸為直線 $x-2=0$ 。試問下列哪些選項是正確的？
- (1) 若拋物線 Γ 的頂點坐標為 $(2, 1)$ ，則其焦點坐標必為 $(2, 4)$
 - (2) 若拋物線 Γ 的焦點坐標為 $(2, 12)$ ，則其頂點坐標必為 $(2, 3)$
 - (3) 若拋物線 Γ 也通過點 $(10, 11)$ ，則其準線方程式必為 $y+6=0$
 - (4) 直線 $x-2=0$ 上每個點都可能是拋物線 Γ 的頂點
 - (5) 直線 $x-2=0$ 上每個點都可能是拋物線 Γ 的焦點

三、選填題（14 分）

說明：A、B 兩題為選填題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（9-14）內。
每一題完全答對得 7 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

- A. 用大小一樣的鋼珠可以排成正三角形、正方形與正五邊形陣列，其排列的規律如下圖所示：

	正三角形陣列	正方形陣列	正五邊形陣列
每邊 1 個鋼珠			
每邊 2 個鋼珠			
每邊 3 個鋼珠			
每邊 4 個鋼珠			

已知 m 個鋼珠恰好可以排成每邊 n 個鋼珠的正三角形陣列與正方形陣列各一個；且知若用這 m 個鋼珠去排成每邊 n 個鋼珠的正五邊形陣列時，就會多出 9 個鋼珠。則 $n = \underline{\textcircled{9}}$ ， $m = \underline{\textcircled{10} \textcircled{11} \textcircled{12}}$ 。

- B. 若空間中一球面 S 與兩平面 $z=4$ 及 $z=8$ 相交的圓面積皆為 36π ，則 S 與平面 $z=7$ 相交的圓面積為 ⑬ ⑭ π 。

-----以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷-----

第貳部分：非選擇題（佔 26 分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號(一、二)與子題號((1)、(2))，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題前。

- 一、(12分) 設 $p(x)$ 為三次實係數多項式函數，其圖形通過 $(1,3), (-1,5)$ 兩點。若 $p(x)$ 的圖形在點 $(1,3)$ 的切線斜率為 7 ，而在點 $(-1,5)$ 的切線斜率為 -5 ，試求 $p(x)$ 。

- 二、設 $\triangle ABC$ 的三高分別為 $\overline{AD}=6$ 、 $\overline{BE}=4$ 、 $\overline{CF}=3$ 。

- (1) (6分) 試證： $\triangle ABC$ 是一鈍角三角形。
- (2) (8分) 試求 $\triangle ABC$ 的面積。