

# 碎形

## 奇怪的形狀， 無窮的應用

如果慣用線、面看待所有的事物，  
就會對崎嶇不平、高低起伏的不規則形狀感到不解，  
甚至產生排斥。可是碎形一詞出現後，  
它代表的是自然幾何學意義，  
在不規則中仍舊潛藏著某種規則的秩序，  
和古典幾何學截然不同。

■ 演講人／陳義裕  
文字撰述／梁雲芳

兩千年來，古典幾何一直被世人認為是唯一的幾何學，所有現象的形成似乎都與它們相關，不是由直線、平面、三角形構成，就是由圓形、圓錐體、梯形組合而來，它們代表現實世界的抽象化。

但事實上，海岸線不是由直線構成，天上的雲朵也不是圓形，山巒更不是圓錐形，還有滿布隕石凹凸不平的月球表面、樹枝的分歧等自然界中的各種形狀，種種不規則形狀要如何用幾何學來說明及解釋？

是呀！宇宙間存在的崎嶇不平、坑坑巴巴、曲折、破裂及各種糾結混亂的形狀，有的和直線類似，卻不是直線；有的很像圓錐形，仔細瞧，又不是真的如此，那麼這些形狀代表的究竟是一個什麼樣的幾何學？

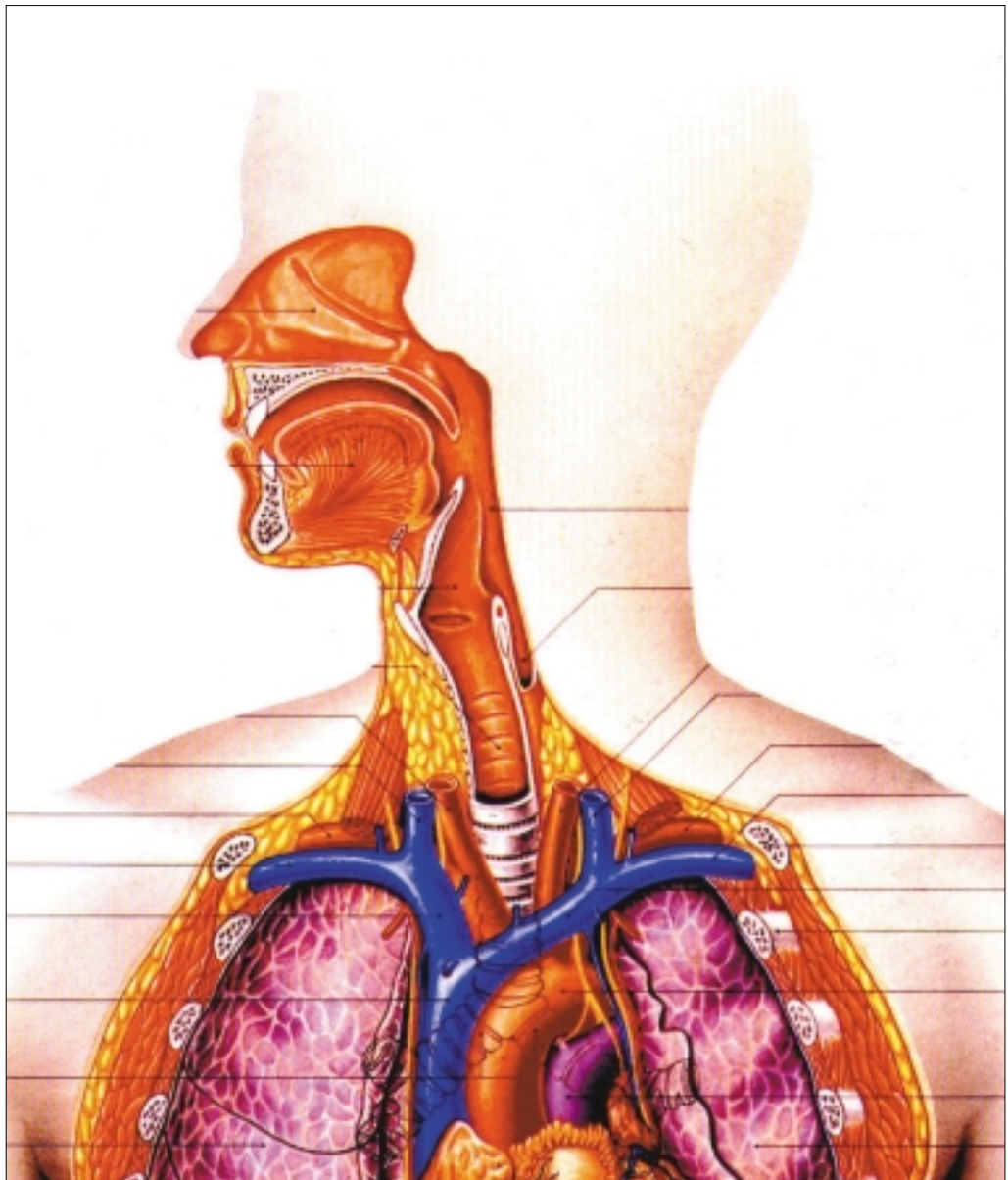
一九七五年某個冬日的午後，法裔美國數學奇才曼德布洛特(Benoit Mandelbrot)創造了碎形(fractal)這個字。碎形是曼德布洛特畢生所從事的研究，他始終相信宇宙間一定有描述不規則形狀的幾何學，絕對不是只有歐幾里德式的長度、深度、厚度，可是要如何用一種「一粒沙窺見塵世」的本質描繪這些宇宙現象？

他在拉丁字典中，找到一個殘破(frangere)的動詞衍生出來的形容詞殘碎的(fractus)，而英語中也有一個破碎(fracture)和破片(fraction)的字義，

並彙整出「碎形」一詞。

「碎形」一出，原先難以利用古典幾何學描述的不規則形狀，終於有了自己的歸屬。碎形揭露的是自然幾何學，不規則中蘊藏某種規則的秩序，卻和尺寸無關，就算放大或縮小，其中的複雜程度並未因此減弱。碎形試圖解釋過去科學忽略的非線性現象與大自然複雜結構，更重要的是碎形觀念已延伸到不同的領域，如生理學、經濟學、社會學、氣象學，以及天文學中的星體分布。

以生理學而言，在人體中，碎形結構處處可見。大動脈會分歧成細動脈，然後又是連續的分歧、岔開，再分歧，直到血管細到血球僅能排成單行通過。這種難以



國際岩石健康研究會提供

人體的血管、肺臟等的結構就是一種碎形結構，不然很難塞到有限的人體組織空間中。

用言語清楚描述的結構，是基於生理需求所形成的，血管必須使用碎形維度將形體壓縮在有限空間中，而所有細胞必須以不超過兩、三個細胞的近距離貼近血管，血管和血液占有的空間也不超過身體的5%。

至於人類正常的肺臟，肺泡跟空氣接觸的面積攤開來有一座網球場那麼大，而它必須容納在胸腔中。所以能夠發展出如此細微的結構，和碎形不無關係，運用簡單的變形規則，就能輕易地將猶如迷宮的氣管及廣大的肺泡表面積設計到有限的空間中。

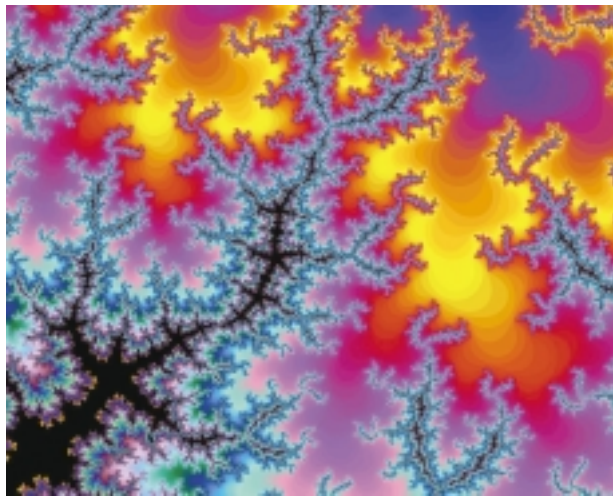
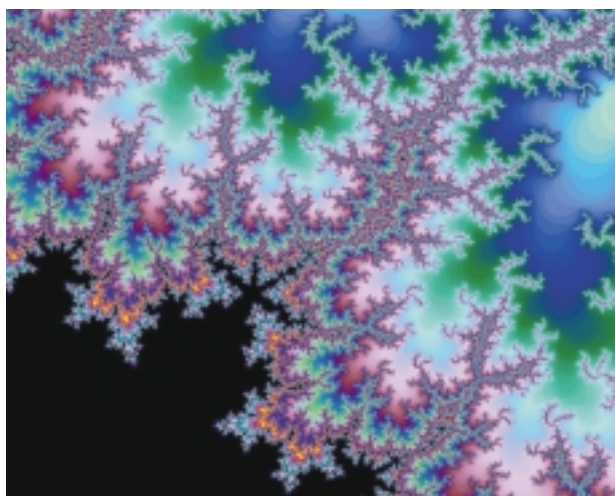
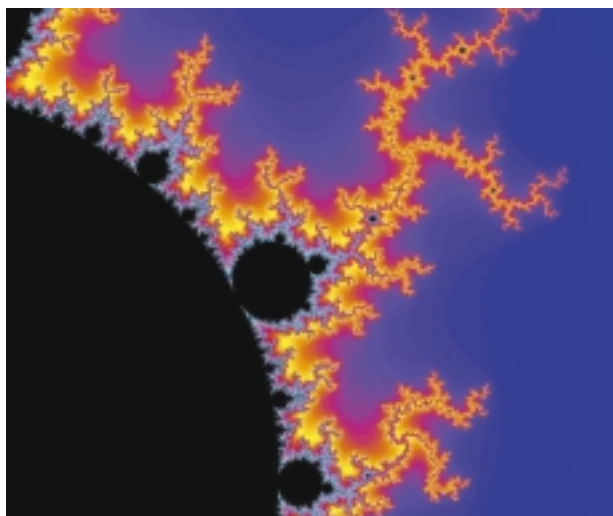
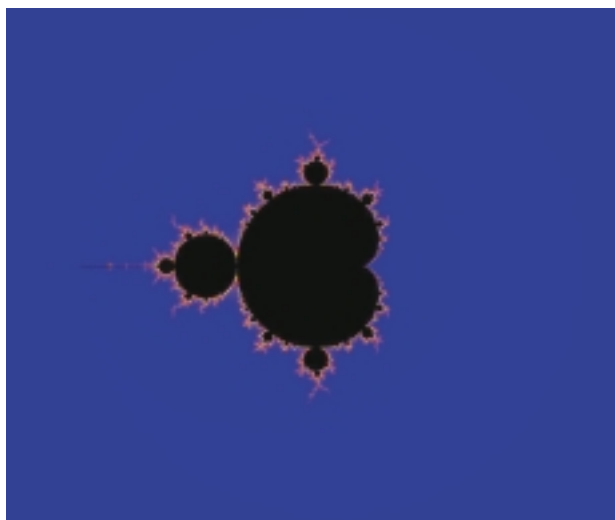
## 碎形重要概念

碎形是一種新維度觀念，和以往尺度、維度、結構有相當大的不同，那麼碎形究竟包含哪些重要概念？

碎形是非線性動力過程的結果，大自然的外貌及結構皆是經由非線性動力過程而產生的結果，也就是說，在非線性動力現象中才能發現碎形的蹤跡。比如說，在水的流動或是在晶體成長的現象中，可能發現碎形。

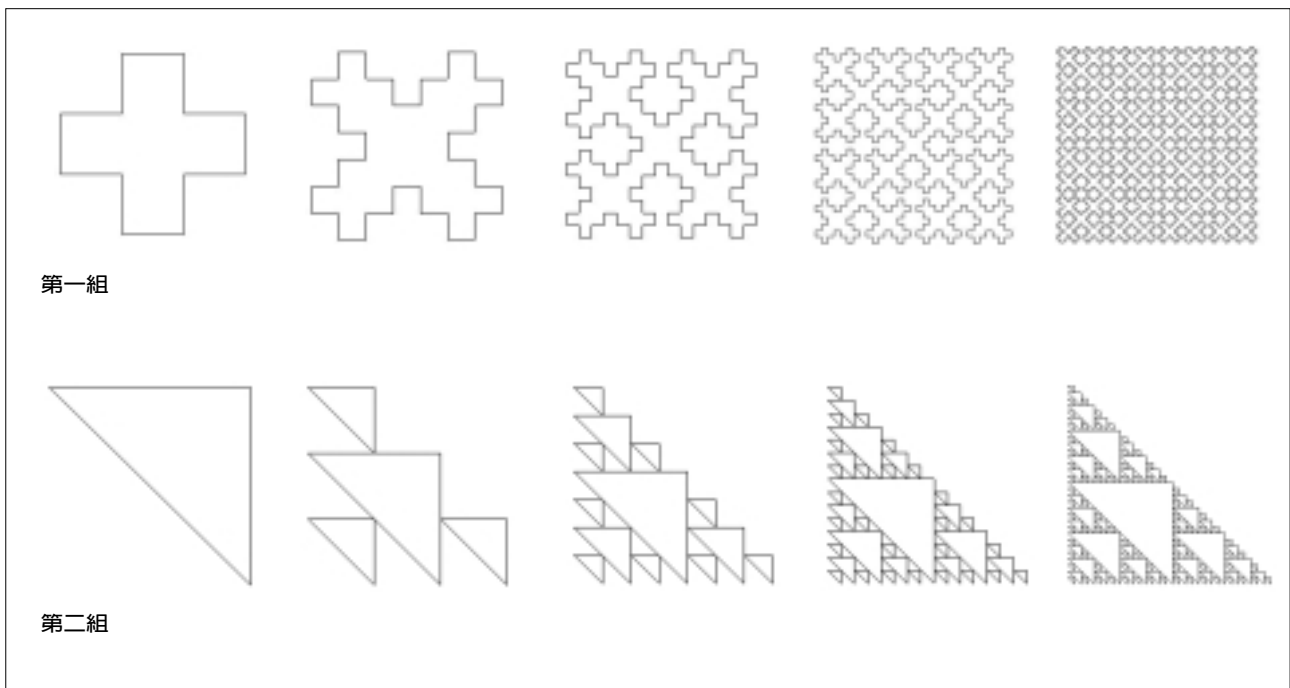
碎形具有自相似性的結構，一個東西經過不斷放大後，始終都具有自相似性的結構，不論該結構有多複雜、多粗糙、多摺疊，都存在某種相似性的結構。

碎形是分數維度，維度（dimension）是用來測量物體的量化標準，與度量的尺度有關。一維是線條概念，就像縫衣服的線一樣；二維是平面概念，就像街道地圖，有長有寬；三維是空間概念，就像經常說的三度空間，有經度、緯度與高度的概念。一維、二維、三維度都是整數維度，很容易運用到日常生活上，複雜程度不



台大物理系陳義裕教授提供

「曼德布洛特集合」是碎形結構的重要代表作，從依序放大的圖檔中，可以清楚發現無關尺寸大小，就算放大到一百萬倍，它們所顯現的自相似性仍舊存在。



透過自相似性結構，可以發展出截然不同的形狀。

高。

但碎形維度是有分數的，就像無窮擴張的三分之四的卡區雪花曲線，維度 $=\log_4/\log_3=1.2618$ 。卡區雪花曲線是瑞典數學家范卡區（Helege von Koch）於一九〇四年首創的，這條既不是筆直又不是圓形的連結曲線，看起來很像雪花圖案，其維度就不是整數，是介於一及二的維度。

碎形具有自我模仿特質，自我模仿是一種很容易辨認的特質，係指在愈來愈小的尺度中，重覆製造細節，並且以某種固定方式縮小細節，造成某種循環的複雜現象。比如說，一枝樹幹初次分成兩枝，每一根分枝看起來跟整棵樹很像。就某種意義而言，一棵樹是由兩個、三個跟自己一樣的複本製作而成。這兩個或三個也許不是很完美，但複製的效果就是一棵樹，透過數學公式簡單的運算，再交由電腦繪製，可以很快地繪製完成一棵樹的「生長」過程。

碎形和尺度不具相關性，無論尺寸是大是小，在一定可觀察的區域中，碎形會有一致性的碎形維度，也就是說它們之間的複雜性、粗糙度不會因為大小而有所改變。比如說，花椰菜是由小花組成，而小花又是由很多小花組成，小花的小花又是由很多小花組成……，第一

組的小花比小花的小花大了許多，但它們的結構都差不多。

### 應用領域既廣且深

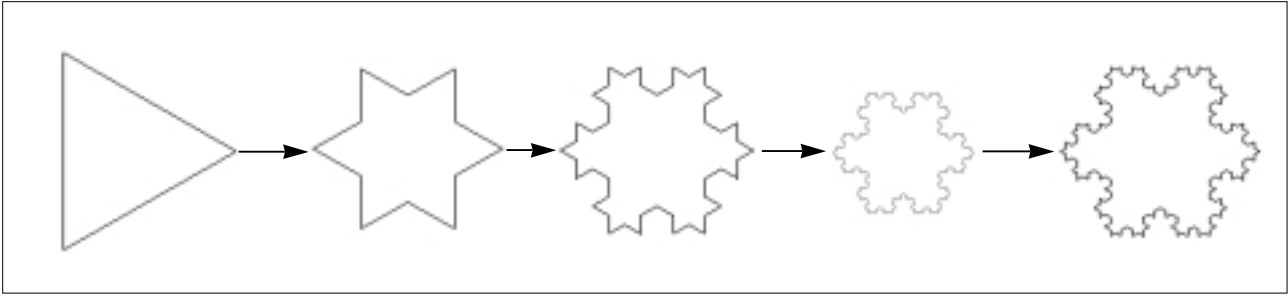
現階段，碎形幾何數學概念早已經應用在不同領域。許多不規則、不穩定、具變動性的現象都會應用碎形予以解釋，或是利用碎形幾何製作出不同的模型，比如說樹狀空間模型、結晶演化模型等。

在繪畫藝術領域，碎形所能著墨之處甚多。碎形的自相似性結構及自我複製特質，可以成為繪畫素材，作品表現的自相似性可以很簡單，也可以很複雜。

美國有一位很有名的抽象畫家帕洛克，自作畫以來，畫風就充滿了自相似性結構的圖案，例如〈藍色欄杆〉這幅畫作，就是一個典型代表。早期，他作畫的碎形結構很簡單，愈到晚期，結構複雜程度愈來愈高，很難被人模仿。

再從碎形結構來論，它可能還可以做為鑑定畫作真偽及年代的工具，只要將自相似性結構的簡單性及複雜性加以比較，就能夠得到確切的答案。

在音樂領域中，最常見的碎形結構應用是在吸音板設備。吸音板結構不是一面板子而已，而是由利用大凹



這是「卡區雪花」，利用簡單的正三角形，在每邊中段再植入另一個同樣大小的正三角形，逐步建立的結果，就很像下雪的雪花。如果只是一半的無限延伸，將會是一條很粗糙，又很靈活，而且無限延長的海岸線了。

槽裡面放置一個中凹槽，中凹槽再放入一個小凹槽，經過無限延伸達到吸音及消音的效果。

此外，利用碎形自相似性結構創作音樂，也是許多樂曲家創作的泉源，除了創作純粹碎形音樂之外，還能創作出碎形變奏樂曲。所謂純粹碎形音樂，就是將所有自相似性的樂曲組成音樂旋律，這方面的音樂較為單調。而碎形變奏音樂內涵就豐富多了，不但有主旋律，還有副旋律。

比如說，你是一位巴哈的樂迷，非常喜歡聆聽他的

鍵盤音樂，聽久了之後，很想改變一下風格，但又不想完全失去原來的曲風，於是找出兩種碎形段落，一為主旋律A，一為副旋律B，整個音樂的旋律係以A為主，但在音樂旋律相似之處接上B旋律，然後又再接上A旋律，反覆相接的結果，雖有巴哈的味道（因為每一段都是巴哈的原作），但音樂曲風及內涵上已經變了質。

碎形也應用在建築結構上，最常引用之處有三個部分，一是形狀生成研究，一是都市成長模擬，再則是設計概念應用。在形狀生成方面，碎形幾何能夠提供形狀

延伸系列及形狀轉變機制；都市成長模擬是指碎形可以提供一個都市原型平面，並以自我相似的成長尺度與時間軸進行都市成長模擬預測；設計概念應用是指運用碎形自我複製概念，在有限的範圍內創造各種設計。透過碎形幾何，建築風貌不再局限於點、線、面的構造，而可以容納更多不規則、具變動性的結構。

在圖檔壓縮技術上，碎形或許也



這是美國著名的抽象畫家帕洛克所繪製最著名的〈藍色欄杆〉抽象畫，仔細瞧瞧，有不少自相似性的結構。

台大物理系陳義裕教授提供



原始照片



第一次解壓縮（還不夠像）



第二次解壓縮（會更接近原始照片）

台大物理系陳義裕教授提供

碎形可以運用在壓縮圖檔上面，透過自相似性的數學公式運算，就可以傳送圖檔，當別人收到圖檔後，再以解壓縮的方式解檔。

可以幫很大的忙。一個未經壓縮的圖案，在資訊傳遞過程中，時間及空間的無端浪費足以讓人捶胸頓足，但是藉由壓縮技術卻可以解除這方面的困擾，而碎形壓縮便是此類技術中的一種新想法。比如說，要傳送壓縮檔給對方，只要下達自我相似縮小的指令給電腦運算，資料就會縮小在一定的空間之內，並傳送給對方，而對方也只要透過自我相似放大的指令，所有資料又會放大。

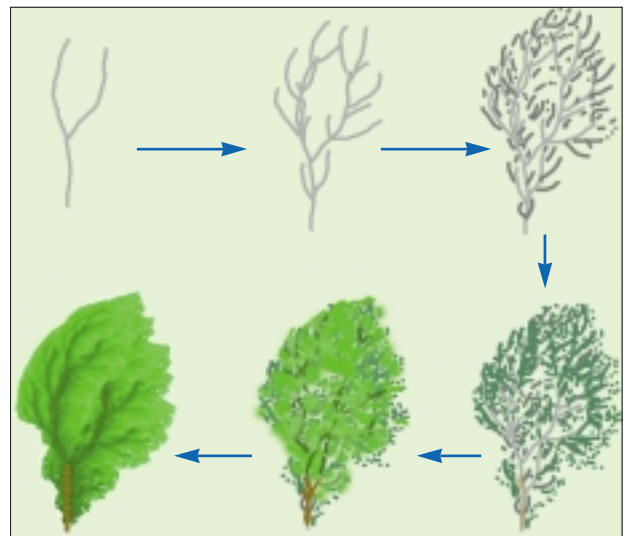
放大照片的過程也是一樣，只要使用自我相似的數學運算公式，交由電腦執行放大指令，電腦就會透過不斷地複製、放大，再複製、再放大的過程，將一張照片放大。

碎形是揭露自然界不規則及非線性動力的秩序，因此在碎形幾何提出之後，對於各種不規則的現象，人們都希望藉由碎形觀念找出某種規則性，試圖解決紊亂中的不確定性。比如說，運用碎形觀念了解交通為什麼會壅塞的原因，並找出解決之道；如何從不規則的湍急水流中，找出規則性的速度；如何從嘈雜的噪音中，找出噪音的規則性，並制定消除噪音的可行性方案。

許多人甚至希望運用碎形模型找到股票指數的起伏，並推算出買進及賣出股票的最佳時機，但牽涉到太多看不到的心理層面的浮動因素，截至目前還在研究之中，並無確切結果。

為什麼自然界一亂一序、疏落有致的美景，給人無限的驚歎？就物理學家的眼光來論，這是因為大自然包羅了所有的尺度，有大小、有複雜、有規則與不規則，從任何角度及距離觀察，都是耐人尋味。碎形結構就是

如此，不論以何種形態出現，都能看得見值得令人細細品味之處。 □



#### 樹枝生長過程

- 第一步驟：首先畫一個Y形狀，這是樹的主幹。
- 第二步驟：再將圖形的每一條線都變成Y形狀。
- 第三步驟：重覆第二步驟。
- 第四步驟：在線段上加上深淺顏色。
- 第五步驟：再重覆第四步驟，一棵樹就長大完成了。

科學是一種生活的態度，是一種運用邏輯思考的方法和追根究柢的精神，去解決在日常生活上和宇宙探索中所遇見的問題的態度。為了讓社會大眾了解科技發展的趨勢，由國科會主辦，中央大學理學院科學教育中心承辦的「2003展望系列演講」於焉誕生。本篇為春季「生活科技」系列92.04.25第二場講座，經本刊特約文字編輯根據演講內容整理改寫。

演講人／陳義裕  
台灣大學物理系教授

文字撰述／梁雲芳  
本刊特約文字編輯