

數學科試題本

請不要翻到次頁!! 讀完本頁說明，聽從監試委員的指示才開始作答!

作答注意事項

作答時間：90 分鐘

配分方式：共 16 題，合計滿分 108 分，其中包含：

- 一、多重選擇題 3 題，每題 7 分。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者得 7 分；答錯 1 個選項者得 3 分；答錯兩個或兩個以上選項者得零分；所有選項均未作答者，該題以零分計算。共 21 分。
- 二、選填題 11 題，第 A 題到第 D 題，每題完全答對得 5 分，第 E 題到第 K 題，每題完全答對得 7 分。不完全答對或不作答不予計分，答錯不倒扣；共 69 分
- 三、非選題 2 題，答錯不倒扣，給分方式是依據思考的邏輯性及表達的清晰完整性給分，共 18 分。

作答方式：選擇及選填題請用 2B 鉛筆在答案卡上畫記，請塗黑塗滿，修正時應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。非選題請用黑色或藍色筆在「答案卷」上作答，可用修正液(帶)修改，切勿使用鉛筆作答，若需擬草稿請利用試題空白處。

作答說明：

- (一) 選擇題：只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到-, ±, 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 10 題為多選題，正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 10 列的 \square_1 與 \square_3 畫記，如：

10	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>										
----	-------------------------------------	--------------------------	-------------------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

- (二) 選填題：選填題的題號是 A, B, C, ...，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{19}}{\textcircled{18}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{8}{3}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 \square_3 與第 19 列的 \square_8 畫記，如：

18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						

- (三) 非選題：請直接用黑色或藍色筆在「答案卷」上作答，可不必抄題，但必需詳述計算或證明過程，只有寫答案不計分，可利用試題空白處擬草稿。

一、多重選擇題 (佔 21 分)

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，每題至少有一個是正確或最適當的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 7 分；答錯 1 個選項者得 3 分；答錯兩個或兩個以上選項者得零分；所有選項均未作答者，該題以零分計算。

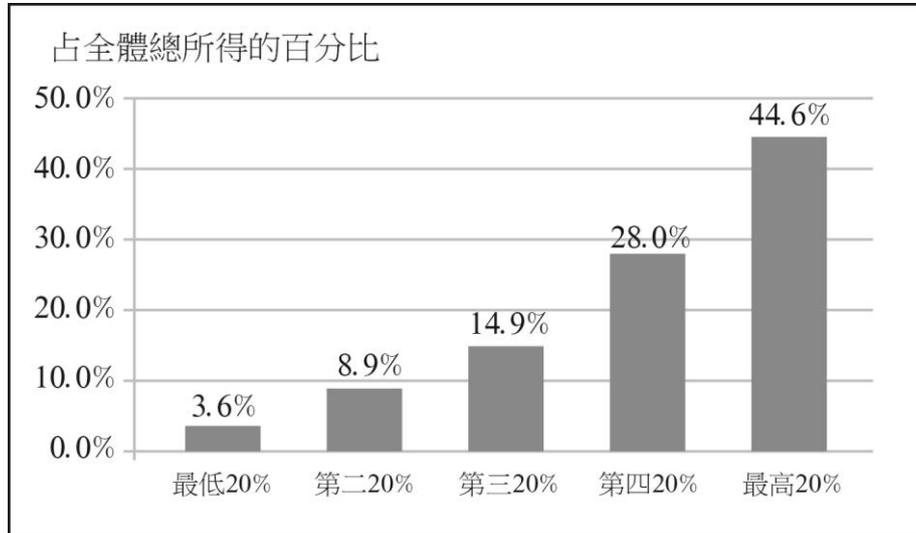
1. 試問下列何者正確：

- (1) 若 a, b 為實數且 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 為有理數，則 \sqrt{a} 和 \sqrt{b} 都是有理數
- (2) 若 a, b 及 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 皆為有理數，則 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ 是有理數
- (3) 若 a, b 是不相等的無理數，則 $ab + a - b$ 是無理數
- (4) 若 a, b 是有理數， c, d 是無理數，已知 $a + c = b + d$ ，則 $a = b$ 且 $c = d$
- (5) 若 a 為有理數且 $0 < a < 1$ ，則 a 為有限小數

2. 若 大雄 和 靜香 兩人同班，且知全班 30 人中有男生 20 人，女生 10 人，今使用簡單隨機抽樣，選出 3 人出公差，已知 大雄 是男生，靜香 是女生，則下列哪些選項是正確的？

- (1) 已知選出的 3 人中有男有女，則 大雄 被抽中的機率大於 靜香 被抽中的機率
- (2) 已知選出的 3 人均為相同性別，則 大雄 被抽中的機率大於 靜香 被抽中的機率
- (3) 抽樣的作法中，不管一次抽取 3 人或每次抽取一人逐次抽取，大雄 和 靜香 兩人同時被抽中的機率相等
- (4) 大雄 和 靜香 兩人同時被抽中的機率大於 $\frac{1}{100}$
- (5) 已知抽中的 3 人中有 大雄，則 靜香 也被抽中的機率大於 $\frac{1}{10}$

3. 所謂個人稅前所得，是指納稅義務人在納稅前之個人所得，以下簡稱所得。依照某國去年的官方資料，依每人所得高低將人數等分為 5 組，最高 20% 的人的總所得占全體總所得的 44.6%，而最低 20% 的人的總所得占全體總所得的 3.6%，所有資料如下圖所示。所得差距倍數是指最高 20% 的個人平均所得與最低 20% 的個人平均所得的比值。請選出正確的選項。



- (1) 此項資料顯示所得差距倍數超過 13 倍
- (2) 最少有 60% 的人，其個人所得低於全體平均所得
- (3) 最低 20% 的人的平均所得為全體平均所得的 3.6%
- (4) 最高 20% 的人的平均所得超過全體平均所得的 3 倍
- (5) 最高 30% 的人的總所得超過全體總所得的 55%

二、選填題(佔 69 分)

說明：第 A 題至第 D 題，每題完全答對得 5 分。

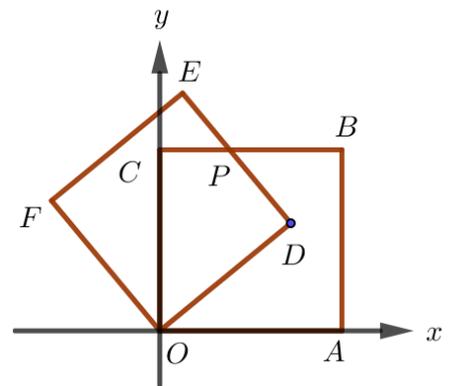
第 E 題至第 K 題，每題完全答對得 7 分。

若答案為分數，請一律化為最簡分數。

試題中的附圖僅為參考，不一定代表真實的比例、長度或角度。

- A. 坐標平面上，有一個正方形的四個頂點分別為 $O(0,0)$ 、 $A(1,0)$ 、 $B(1,1)$ 、 $C(0,1)$ 。今將此正方形逆時針繞原點旋轉角 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) 後，得到另一個正方形 $ODEF$ ，如圖所示。

已知 \overline{DE} 與 \overline{BC} 交於點 P ，且四邊形 $ODPC$ 的面積為 $\frac{2}{5}$ 。若點 $D(s,t)$ ，則 $s = \frac{\textcircled{6}\textcircled{7}}{\textcircled{4}\textcircled{5}}$ 。



- B. 有一種特殊的碗豆，其成長高度只受肥料的酸鹼性、日照長短、溫度高低此三個條件的影響，假設這三種條件是各自獨立的，且可以使用加法計算各條件所影響的高度。森森做了四組成長高度實驗，並表列如下：

組別	實驗組合內容	十天後成長高度(公分)
一	鹼性、日照短時間、低溫	19
二	鹼性、日照長時間、高溫	17
三	酸性、日照短時間、高溫	7
四	酸性、日照長時間、低溫	21

若森森為了使這種碗豆的栽培在十天後得到最高的高度，他適當選擇肥料的酸鹼、日照的

長短、溫度的高低，則十天後最高的高度應為 ⑧ ⑨ 公分

C. 設 a, b, c, d 均為實數，且滿足 $a+b=c$ 、 $b+c=d$ 、 $c+d=a$ 。若已知 b 是正整數，試求

$$a+b+c+d \text{ 的最大值} = \underline{\textcircled{10} \textcircled{11}}$$

D. 已知坐標平面上 $y = |x+3|(x-4) - x - m$ 的圖形和 x 軸交於相異三點，若 m 值範圍為

$$a < m < b, \text{ 試求 } a+b = \underline{\textcircled{12} \textcircled{13} \textcircled{14}}$$

E. $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 30^\circ$ ，且 $\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{AB} \times \overline{AC}$ ，試求 $\frac{1}{2} \angle C = \underline{\textcircled{15} \textcircled{16}}$ 度

F. 設 $f(x)$ 為 n 次非負整係數多項式，且滿足 $f(1) = 6$ ， $f(7) = 3438$ ，試求

$$f(3) = \underline{\textcircled{17} \textcircled{18} \textcircled{19}}$$

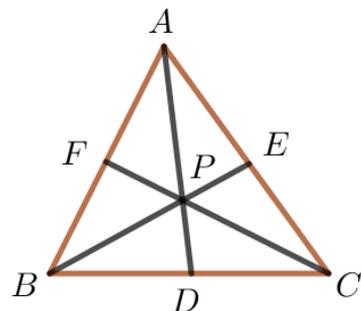
- G. 在 1781 年江戶時代的日本數學家藤田貞資於《精要算法》中提出所謂「蟲蝕算」這種填字遊戲。顧名思義，蟲蝕算遊戲就是將算式中打□這些被蟲損傷的地方，根據算術或代數推理手段恢復原來的數字使等式成立。下圖是一道稱為〈一個 8〉的蟲蝕算遊戲：

$$\begin{array}{r}
 \square \square \square \\
 \times \quad 8 \square \\
 \hline
 \square \square \square \square \\
 \square \square \square \\
 \hline
 \square \square \square \square
 \end{array}$$

試問這道遊戲的最後四個數字 = ②0 ②1 ②2 ②3 (即求最後一列的四個數字)

- H. 如圖所示，在 $\triangle ABC$ 中 D 、 E 、 F 分別為 \overline{BC} 、 \overline{AC} 、 \overline{AB} 上一點，且 \overline{AD} 、 \overline{BE} 、 \overline{CF} 相交於 P ，若 $\overline{AP} = a$ 、 $\overline{BP} = b$ 、 $\overline{CP} = c$ 、 $\overline{PD} = \overline{PE} = \overline{PF} = 3$ ，已知 $a + b + c = 43$ ，試求三

數的乘積 abc 之值 = ②4 ②5 ②6



I、設 $[a]$ 表示不大於 a 的最大整數，其中 a 為實數，例如 $[3.1]=3$ 、 $[-\sqrt{2}]=-2$ 。若 x 為實數，

試求方程式 $[3x+1]=2x-\frac{1}{2}$ 的所有根之和 = ②⑦ ②⑧

J. 武陵高中目前正在建造地下室 3 層停車場及地上 7 層樓高的專科教室大樓，為了突顯學校的特色，決定地上 7 層樓外牆的部份只能用蘋果綠、橄欖綠或鵝黃色的油漆來粉刷，每層樓只用一個顏色，而且不能有連續兩層是鵝黃色的，則地上 7 層樓外牆有 ②⑨ ③① ③② 種可能的粉刷方式（包含鵝黃色沒用或只用一次）

K. 在一個圓周上取相異的 2000 個點，取其中一個點標記上 1，從這個點開始順時針方向數到第二個點標記上 2，再從標記上 2 的點順時針方向數到第三個點標記上 3，繼續這個方式直到 1,2,3,...,1993 均被標記到點上。圓周上這些點有一些會被標記上不止一個數，也有些點可能不會被標記上任何數，試問標上 1993 的那個點上標記的最小整數 = ③③ ③④ ③⑤

三、非選擇題共兩題(佔 18 分)

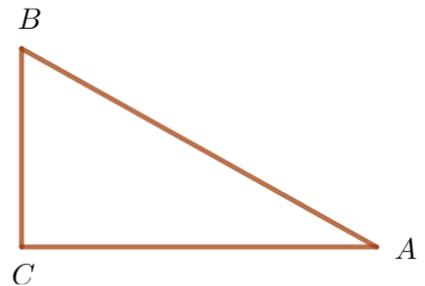
說明：請用黑色或藍色墨水的筆在答案卷上作答，可用修正液(帶)修改，切勿使用鉛筆作答，每題配分標於題末。給分方式是依據思考的邏輯性及表達的清晰完整性。

第 1 大題：若 a, b, c 為某一個三角形的三邊長且 $a + b + c = 1$ ，則：

(1) 試求 a 的範圍 (2 分)

(2) 試證明 $a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}$ (8 分)

第 2 大題： $\triangle ABC$ 中 $\angle C = 90^\circ$ ，試在 $\triangle ABC$ 內部找一點 P ，使得 $\angle PBC = \angle PCA = \angle PAB$ ，試寫出作法及證明此作法是對的 (8 分)



(試題結束)

Ans

1. 2

2. 23

3. 5

A. $\frac{20}{29}$

B. 25

C. -5

D. -10

E. 25

F. 166

F. 9968

G. 441

H. -2

I. 1224

J. 118