

一、選擇題(佔 36 分)

說明：第 1 題至第 6 題，每題有五個選項，其中只有一個是最適當的選項，請將答案畫記至答案卡上。每題答對得 6 分，答錯或不作答不予計分。

1. 設 a, b 為實數，且滿足下列兩不等式 $\begin{cases} 20x + a > 0 \\ 15x - b \leq 0 \end{cases}$ 的整數 x 只有 2, 3, 4，則 ab 的最大值為

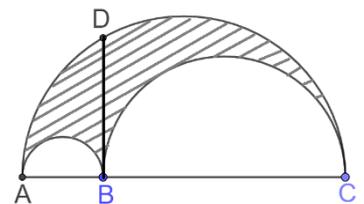
(1) -2400 (2) -3000 (3) -1200 (4) -800 (5) -1500

2. 設 $10 \leq n \leq 100$ ，且 $8n + 1$ 為完全平方數，則符合條件的整數 n 有幾個？

(1) 5 個 (2) 9 個 (3) 10 個 (4) 19 個 (5) 20 個

3. 如圖， B 是 \overline{AC} 上一點，分別以 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{AC} 為直徑作半圓。從 B 做 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ，與半圓交於 D 。請問：圖中斜線部分的面積與下列哪個選項的面積相等？

(1) 以 \overline{BC} 為直徑的半圓 (2) 以 \overline{BD} 為直徑的半圓 (3) 以 \overline{AB} 為直徑的圓
(4) 以 \overline{BD} 為直徑的圓 (5) 以上皆非



4. 日劇《詐欺遊戲》中，主角秋山與對手菊地進行「17張撲克牌」遊戲，其中17張撲克牌是由四種花色的A J Q K及一張鬼牌(簡稱“鬼”)所組成。雖然菊地擁有動態視力，能在事務員洗牌的時候追蹤鬼牌的位置，但秋山在經過前幾場的測試中發現了以下規律：

①每一局開始，都會使用全新未拆封的牌，其順序必為：

A J Q K A J Q K A J Q K A J Q K 鬼

②事務員每次洗牌，都會使用完美洗牌。先將17張牌分為右手9張、左手8張，再依右左右...左右的順序重新排列，以下用全新未拆封的牌為例：

第一次洗牌：

A J Q K A J Q K A / J Q K A J Q K 鬼 → A J J Q Q K K A A J J Q Q K K 鬼 A

第二次洗牌：

A J J Q Q K K A A / J J Q Q K K 鬼 A → A J J J J Q Q Q Q K K K K 鬼 A A A

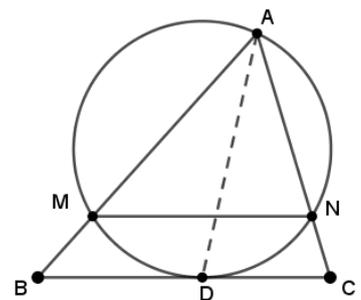
若在最後一局中，事務員將全新未拆封的牌(鬼牌在右邊數來第一張)完美洗牌洗了14次後，則鬼牌的位置會在右邊數來的第幾張？

- (1) 第8張 (2) 第9張 (3) 第13張 (4) 第15張 (5) 第16張

5. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 9$ ， $\overline{BC} = 8$ ， $\overline{CA} = 7$ ， D 在 \overline{BC} 上，且 \overline{AD} 為 $\angle A$ 的角平分線。

一圓通過 A, D 兩點，且和 \overline{BC} 相切，分別交 \overline{AB} ， \overline{AC} 於 M, N 兩點。則 \overline{MN} 長為

- (1) 6 (2) $3\sqrt{3}$ (3) $4\sqrt{2}$ (4) $\sqrt{35}$ (5) 2π (圖僅供示意，不代表真實比例)



6. 若實數 x 、 y 滿足方程式 $xy - x - y = 1$ ，則 $x^2 + y^2$ 的最小值為何？

- (1) 1 (2) $2\sqrt{2} - 1$ (3) $2\sqrt{2} + 1$ (4) $6 - 4\sqrt{2}$ (5) $6 + 4\sqrt{2}$

二、選填題(佔 96 分)

說明：第 A 題至第 L 題，每題請依答案格式將答案畫記到答案卡上。各題每格全部答對才得 8 分，答錯或不作答不予計分。

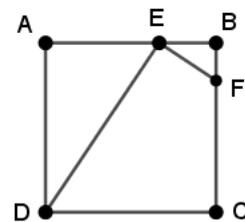
A. $113^2 + 112^2 + 111^2 - 3 \times 110^2 = \underline{\textcircled{7}\textcircled{8}\textcircled{9}\textcircled{10}}$ 。

B. $\frac{x+2+3}{x} + \frac{x+2+3}{2} + \frac{x+2+3}{3} = 1$ ，所有符合此式子的實數 x ，相加後的值為 $\textcircled{11}\textcircled{12}$ 。

C. 已知 n 為小於 100 的正整數，且 $5n^2 + 3n - 5$ 被 15 整除。求所有滿足上述條件的 n 的總和為 $\textcircled{13}\textcircled{14}\textcircled{15}$ 。

D. 如圖所示， $ABCD$ 是邊長為 1 的正方形， E 點在 \overline{AB} 上， F 在 \overline{BC} 上，且 $\overline{DE} \perp \overline{EF}$ ，則 \overline{BF}

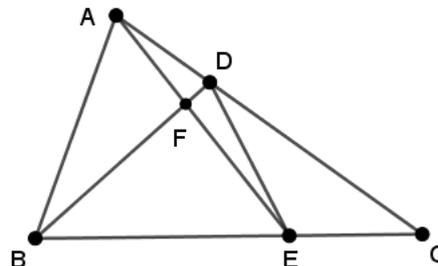
長的最大值為 $\frac{\textcircled{16}}{\textcircled{17}}$ 。(請化為最簡分數)



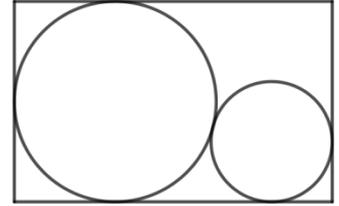
E. 設相異兩點 $A(x_1, -2048)$ 、 $B(x_2, -2048)$ 在二次函數 $y = -(x - 1)^2 - 2023$ 的圖形上，若 $C(x_1 + x_2, k)$ 也在此函數圖形上，則 $k = \underline{\textcircled{18} \textcircled{19} \textcircled{20} \textcircled{21} \textcircled{22}}$ 。

F. 一個等差數列 $\langle a_n \rangle$ ，已知 $a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 18$ ， $a_{n-4} = 30$ ，且 $a_{10} + a_{11} + \dots + a_n = 318$ ($n > 9$)，則 $n = \underline{\textcircled{23} \textcircled{24}}$ 。

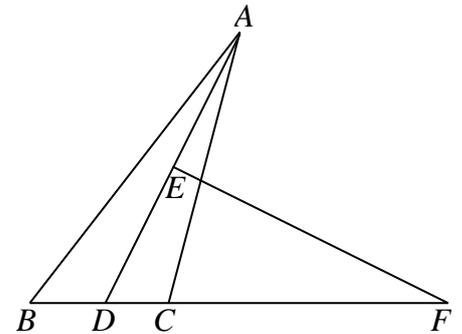
G. 如圖(圖僅供示意，不代表真實比例)，已知 $\triangle ADF$ ， $\triangle ABF$ ， $\triangle DEF$ 的面積依序為 10, 45, 12，則 $\triangle ABC$ 的面積為 $\underline{\textcircled{25} \textcircled{26} \textcircled{27}}$ 。



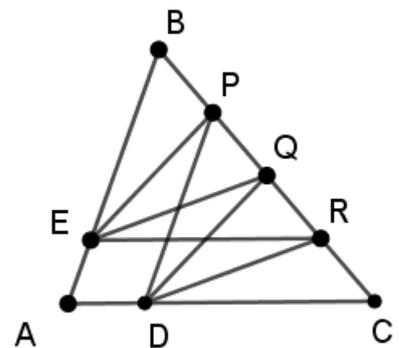
- H. 如圖(圖僅供示意，不代表真實比例)，有一張長 49 公分，寬 32 公分的厚紙板。在剪去一個與三邊相切的圓之後，剩下的厚紙板能剪出的最大的圓面積為 2829 π 平方公分。



- I. 如圖(圖僅供示意，不代表真實比例)， $\triangle ABC$ 中， \overline{AD} 是 $\angle BAC$ 的平分線， \overline{AD} 的垂直平分線交 \overline{AD} 於 E ，交 \overline{BC} 的延長線於 F ，若 $\overline{CF} = 6$ ， $\overline{BC} = 3$ ，則 $\overline{FD} = \sqrt{30}$ 31。

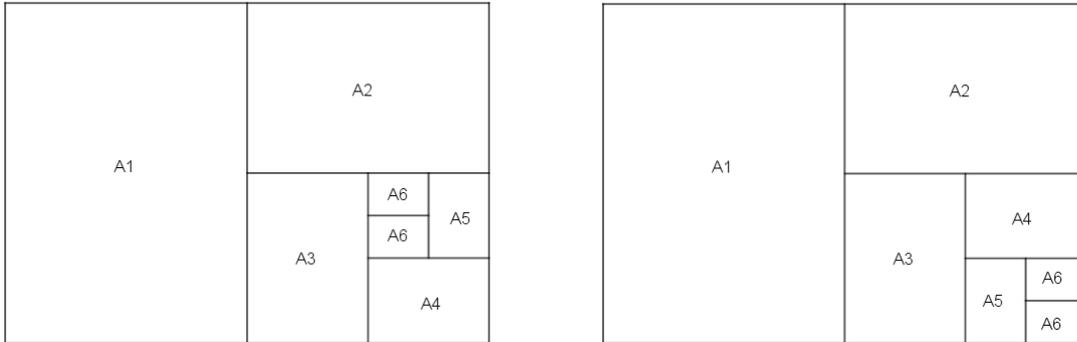


- J. 如圖(圖僅供示意，不代表真實比例)， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 70^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 50^\circ$ ， D 在 \overline{AC} 上且 $\overline{AC} = 4\overline{AD}$ ， E 在 \overline{AB} 上且 $\overline{AB} = 4\overline{AE}$ ， P, Q, R 在 \overline{BC} 上且 $\overline{BP} = \overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RC}$ ，則 $\angle DPE + \angle DQE + \angle DRE = \underline{32}33 度。$



K. A 系列紙張尺寸中最大的尺寸為 A0，若將 A0 紙張從長邊中點連線對折裁切，會得到兩張 A1 尺寸的紙張；再將一張 A1 紙張對半裁切可得兩張 A2 尺寸的紙張...依此類推。故一張 A0 尺寸的紙可以裁切成數張不同尺寸的 A 系列紙張，例如 2 張 A1 大小的紙，或是 1 張 A1、1 張 A2、2 張 A3 大小的紙。如果我們想將一張 A0 大小的紙裁成 7 張 A 系列的紙張，共有 34 種裁切結果。

註：注意下面兩張圖，雖然裁切位置不同，但其結果都是 A1、A2、A3、A4、A5 各一張與 A6 兩張，故視為同一種裁切結果。



L. 設 $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 4}) = 7$ ，則 $x\sqrt{y^2 + 4} + y\sqrt{x^2 + 1} = \frac{\textcircled{35}\textcircled{36}}{\textcircled{37}\textcircled{38}}$ 。(請化為最簡分數)

參考答案：

1. 3

2. 3

3. 4

4. 3

5. 1

6. 4

A. 1334

B. -5

C. 635

D. $\frac{1}{4}$

E. -2024

F. 21

G. 165

H. 81

I. 54

J. 70

K. 9

L. $\frac{45}{14}$