

# 超導電路上的量子電動力學

文/ 黃仁壽

量子電動力學原本是用來描述自然界中電磁場與原子態的量子交互作用, 但現在我們可以在人為的超導電路上也觀測到...

## 傳統的量子電動力學

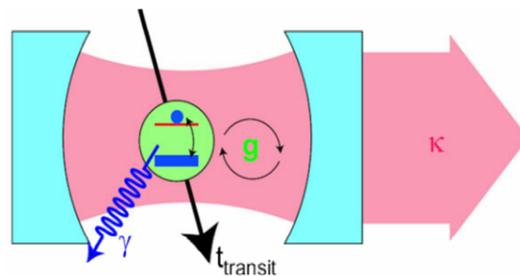
量子電動力學(Quantum Electrodynamics)自從發現以來, 一直是相當成功的理論, 不論在實驗上及理論計算上都有很傑出的表現, 傳統上原子分子與光量子的交互作用都可以由它來解釋。其中最簡單的模型可以由圖表中了解, 但是原子態與光子間的作用強度, 是由 Fine Structure Constant 這個宇宙常數來決定, 這個數值很小而且無法改變, 所以在光學上的連續(coherent)原子光子交互作用相當不易, 一直到數年前才在三維共振腔中被觀測到[2]。

## 超導電路上的光子

如果想要在電路上觀察到同樣的現象, 我們得要先找到我們的原子跟光子。光子的部分, 或是說我們的共振腔, 其實是一個一維的共面波導共振器(coplanar waveguide resonator)[3], 它是在矽基板上鍍上一層鋁薄膜製成, 如圖表 2a, 它的共振頻率  $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi \times 6.044\text{GHz}$ , 其中 L 與 C 則是因為這個共振器可以用並聯的電感與電容來模擬, 這個簡單

黃仁壽  
中央研究院應用科學研究中心  
E-mail: rshuang@gate.sinica.edu.tw

的共振電路可由  $H_r = \hbar\omega_r(a^\dagger a + 1/2)$  來描述, 其中  $\langle a^\dagger a \rangle$  是電路中平均的光子數目, 由於操作溫度  $T \cong 100\text{mK}$  遠低於共振頻率  $\hbar\omega_r/k_B \cong 300\text{mK}$ , 所以系統幾乎停留在基態, 但是零點振盪(zero-point fluctuation) 仍然在共振器的中心導體跟接地板之間造成了強大的電場  $E_{\text{rms}} \approx 0.2\text{Vm}^{-1}$ , 這可是一般光學共振腔裡電場強度的數百倍。



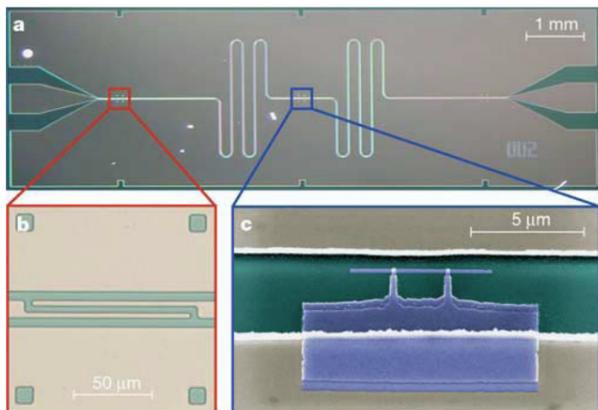
圖表 1: 原子通過共振腔時(cavity), 原子可以吸收子而躍遷到激態, 也可以放出光子而回到基態; 但是光子在共振腔中跟原子態本身都有各自的生命期(lifetime), 所以原子態與光子的交戶作用  $g$  得要比他們各自的衰退速率(decay rate)快才能被觀測到。

共振器兩邊經由兩個接口電容連接到外部傳導線, 如圖表 2b, 我們可以微波來進行頻譜分析。但是共振器裡光子的損耗也是主要由此流失, 衰退速率為  $\kappa = \omega_r/Q$ , 實驗中 quality factor  $Q \sim 10^4$ , 所以共振器裡的光子生命期約有  $1/\kappa \sim 100\text{ns}$ 。

## 超導電路上的原子

在這電路上的人造原子則是一個 Cooper pair

box，它是由一個微米尺寸的超導顆粒(superconducting island)接上兩個更小的 Josephson junction 組成，它的位置是放在共振器的中央導體跟接地板之間，如圖表 2c，庫柏電子對盒可以由  $H_a = -(E_{cl}\sigma^x + E_J\sigma^z)/2$  來描述 [4]，其中  $E_{cl} = 4E_C(1-n_g)$  是靜電能而  $E_J = E_{Jmax} \cos \pi\Phi_B$  是 Josephson energy，而  $E_C$  跟  $E_{Jmax}$  這兩個主要的參數都可以在製造的過程中微調控制；另外在實驗時可操控的變因有  $n_g = V_g C_g / e$ ， $V_g$  是超導顆粒的控制電壓， $C_g$  則是顆粒自己的有效電容，還有磁通量變因  $\Phi_B = \Phi_B = \Phi / \Phi_0$  是穿過兩個 Josephson junction 合成的 SQUID 的控制磁通量。

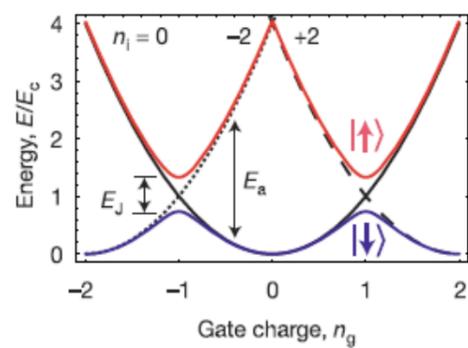


圖表 2：整個超導共面波導振盪器由光學蝕刻法製成，中心導體的寬度及與上下接地板的間距經過刻意選擇，使其阻抗  $Z = 50\Omega$ ，能與其他常用的微波儀器相符；中心導體兩端與外接導線經由電容相連如 b 圖，這個設計讓接合強度及共振器的 Q 值可以自由控制；c 圖中紫色部分是 Cooper pair box，綠色是底座基板，褐色上部是中心導體、下部是接地板，紫色細長者是超導顆粒，經由兩個 Josephson junction 連接到接地板，這部分是由電子束蝕刻技術完成。

$\Phi_B = \Phi / \Phi_0$  是穿過兩個 Josephson junction 合成的 SQUID 的控制磁通量。

整個 Cooper pair box 的能譜可見圖表 3，在此我們以自旋的表示法  $|\downarrow\rangle$  來代表基態、 $|\uparrow\rangle$  代表激態，兩

者的能量差  $H_a = \hbar\omega_a$  可以任意調整：



圖表 3：圖中藍線為基態，紅線為激態，黑色的點線、實線、及虛線各指在超導顆粒上-1、0、1 個多餘的 Cooper pair。

但是激態本身的生命期仍然有所限制，及它的連續性(coherence)也被能量差的波動所影響。

### 原子與光子的交互作用

在這裡我們人造的“原子”跟“光子”互相作用的方式跟自然界中的原子與光子相同，都是電偶極與電磁場的交互作用，除了上述提到在超導電路中電場強過光學共振腔上百倍外，因為 Cooper pair box 的超導顆粒尺寸是一般原子的數千倍大，所以我們人造原子的電偶極是原子的數千倍，相乘起來在超導電路中交互作用強度比在光學共振腔裡強上將近百萬倍；但是另一方面，自然界中的原子及光學共振腔裡的光子生命期卻比這裡人造的原子跟光子都要長的多，但是不論是哪一種，我們都能達到強耦合(strong coupling)的要求，也就是交互作用強過原子及光子的衰退速率。

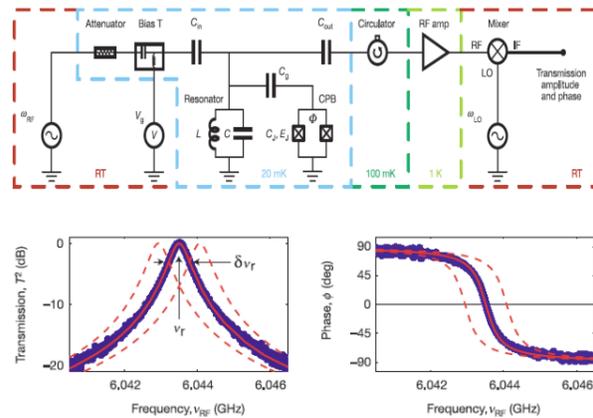
當原子態與光子的能差(detuning)  $\Delta = \omega_a - \omega_r$  為零時，整個系統的 eigenstates 正好是零個光子、原子激態與一個光子、原子基態的正反對稱線性疊加  $(|0, \uparrow\rangle \pm |1, \downarrow\rangle) / \sqrt{2}$ ，系統能量則是  $E = \hbar\omega_r \pm g$ ；形成光子與原子態交纏(entangle)的狀態。

### 微波量測

因為系統達到強耦合的條件使的它的量子特性得

以保存，我們也能以量子非破壞性量測 (quantum non-demolition measurement) 的方式來進行量測。為此，我們採取  $|\Delta| \gg g$  的情況，此時，如同自然界光子與原子相互作用時的 Lamb shift 一般，光子的頻率  $\omega_r$  被稍微修正變成  $\sim \omega_r \pm g^2 / \Delta$ ，而當中的正負號則是由原子是在基態或激態來決定，而我們也就是利用這微小的頻率變化，來探測到底我們的人造原子是在哪個態。

整個系統的電路示意圖如圖表，當以微波通過共振器時，透射頻譜基本上就是一個中心在  $\nu_r$ 、寬度為  $\delta\nu_r = \nu_r / Q = \kappa / 2\pi$  的 lorentzian，



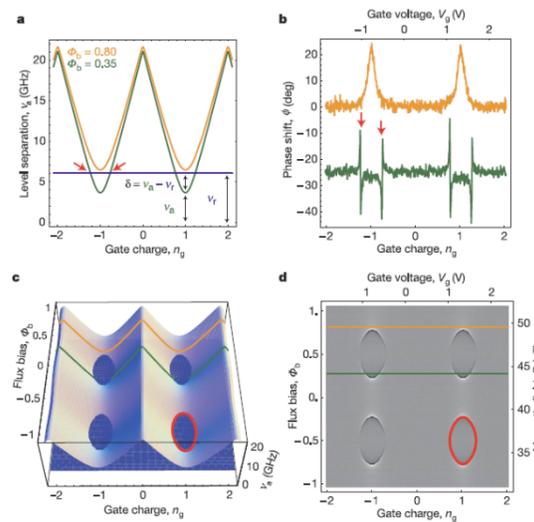
圖表 4：上圖為整的電路示意圖，下兩圖各為透射波的強度及相位差。

如圖表，所以我們將  $\nu_r$  選為原始的共振器頻率  $\omega_r$ ，而因為 Lamb shift 而稍微偏移的共振器頻率，則會使得透射波產生一個像位差  $\phi \cong \pm \tan^{-1}(2g^2 / \kappa\Delta)$ ，而我們再將透射波與另一個頻率為  $\omega_r$  的微波進行干涉實驗，即可量得像位差，進而得知 Cooper pair box 是在基態或激態。

### Cooper pair box 的能譜

有了上述的利器，我們就能對 Cooper pair box 做更直接的觀察；經由量測透射波的相位變化，Cooper pair box 的能量差  $\omega_a$  與光子的能量  $\omega_r$  的相對差就可以被求得，如圖表，藉由嘗試可調控的操縱變因  $n_g$  與  $\Phi_B$ ，Cooper pair box 完整的能譜就被精確的量測出來，值得

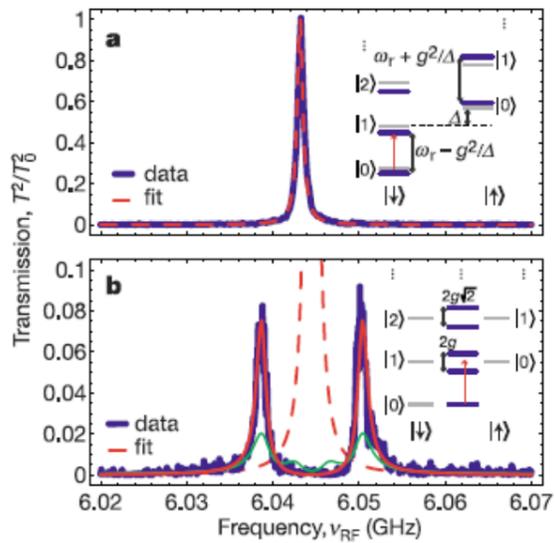
注意的是  $\Phi_B$  方向上清楚的顯現了單位量子磁通量  $\Phi_0$  的周期性。



圖表 5：a 圖及 b 圖顯示微波通過共振器時隨著 Cooper pair box 能差的改變，當 Cooper pair box 能差與共振器頻率相等時，會產生稱相位反轉的現象，如 b 圖中綠線；c 圖及 d 圖則是將相位差劃在兩個可操縱變因為軸的 3d 及 2d 圖。

### 原子與光子的連續(coherent)交互作用

除了透射波的相位差外，另一項利器就是它的強度，如圖表，我們可以清楚的看到在能差  $\Delta = 0$  的情形下，原本單一的共振器頻率  $\omega_r$  分裂成  $\omega_r \pm g / \hbar$ ，這也等於是 Rabi 震盪在頻譜上的展現。



圖表 6：共振器的透射波強度頻譜，當共振條件發生時，也就是共振器頻率與 Cooper pair box 能差相同時，共振器頻率分裂為兩個，分別為光子態與原子態的正反對稱線性疊加。

### 參考資料

- [1] A. Wallraff, D.I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S.M. Girvin, R.J. Schoelkopf, *Nature*, 431, 162 (2004).
- [2] Thompson, R. J., Rempe, G. & Kimble, H. J., *Phys. Rev. Lett.* 68, 1132 (1992).
- [3] Day, P. K., LeDuc, H. G., Mazin, B. A., Vayonakis, A. & Zmuidzinas, J., *Nature* 425, 817–821 (2003).
- [4] Makhlin, Y., Schön, G. & Shnirman, A., *Rev. Mod. Phys.* 73, 357–400 (2001).