

光子的量子不可區分性 與多光子糾纏態的備製

文/ 李哲明、陳岳男



本文簡介目前實驗上產生多光子糾纏態的原理與方法，以光子的量子不可區分性、光子在分光器（beam splitter）及偏振分光器（polarizing beam splitter）上的干涉現象為討論的主軸，以此為基礎，進而延伸至多光子糾纏態的備製與相關的應用。

一、引言

糾纏態的量子關聯性[1]，不僅是量子力學的核心[2]，亦提供了嶄新的資訊處理方法[3-5]；目前在理論與實驗上，糾纏光子已經被廣泛且深入的研究，藉由糾纏光子對[6]與線性光學器件，可以產生多光子量子關聯[7,8]，六光子糾纏態在實驗上亦已經成功地被產生[9]，於此，我們將簡介其中主要的原理與方法，以及在量子資訊處理中主要的應用。

二、雙光子在分光器上的干涉效應，偏振糾纏光子分析，與光子貝爾態量測

一般標準的分光器可以將分別具有空間模式 a 與 b 的兩束射入光同調地轉換成具有 c 與 d 模式的射出光，且其間模式的轉換不對光的偏振狀態造成

影響；在量子力學的表述裡，50:50 分光器對光子的作用可以寫為[10]

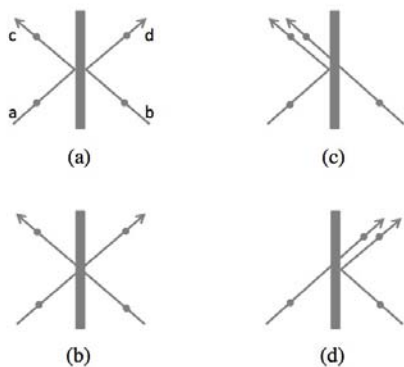
$$\begin{aligned} |a\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|c\rangle + |d\rangle), \\ |b\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|c\rangle - |d\rangle), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $|a\rangle$ （以及其他相同的符號）用來表示光子

在 a 空間模式（其他的空間模式）的量子態。現在考慮兩個空間模式分別為 a 與 b 的入射光子的射出型態，有四種相同機率的可能性[11]：(a) 兩者皆反射，(b) 兩者皆透射，(c) 具 a 模式的光子反射，而具 b 模式的光子透射，(d) 具 b 模式的光子反射，而具 a 模式的光子透射；如圖一所示；如果進一步假設此雙光子具有相同頻率且**同時抵達分光器**，此時，根據雙光子的射出型態，我們無法判定各出射光子的射入空間模式為何，所以針對特定的雙光子射出型態我們必須考慮不同可能入射型態其振幅的同調疊加，雙光子的量子力學不可區分性表現於此。

李哲明
國立成功大學物理系博士後研究員
德國海德堡大學物理研究所訪問學者
E-mail: li.cheming@gmail.com

陳岳男
國立成功大學物理系
國家理論科學研究中心
E-mail: yuehnan@mail.ncku.edu.tw



圖一：雙光子入射於分光器與其四種射出型態

為了說明偏振糾纏光子分析的原理，我們考慮如下的雙入射光子

$$|\phi_i\rangle = |\varphi\rangle_1 |a\rangle_1 |\xi\rangle_2 |b\rangle_2, \quad (2)$$

其中 $|\varphi\rangle_1$ 與 $|a\rangle_1$ ($|\xi\rangle_2$ 與 $|b\rangle_2$) 分別代表一(二)號光子的偏振態與空間模式，當一、二號光子經過分光器後，其量子態轉變為

$$|\phi_f\rangle_{12} = \frac{1}{2} |\varphi\rangle_1 |\xi\rangle_2 (i|c\rangle_1 |c\rangle_2 + i|d\rangle_1 |d\rangle_2 + |d\rangle_1 |c\rangle_2 - |d\rangle_2 |c\rangle_1), \quad (3)$$

當我們考慮光子同時抵達分光器的情形時，雙光子經過分光器後是不可區分的，基於之前雙光子量子力學不可區分性的討論，其量子態是

$$|\phi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_f\rangle_{12} + |\phi_f\rangle_{21}), \quad (4)$$

其中

$$|\phi_f\rangle_{21} = \frac{1}{2} |\varphi\rangle_2 |\xi\rangle_1 (i|c\rangle_2 |c\rangle_1 + i|d\rangle_2 |d\rangle_1 + |d\rangle_2 |c\rangle_1 - |d\rangle_1 |c\rangle_2), \quad (5)$$

為 $|\phi_f\rangle_{12}$ 的交換波函數；現在，代入一、二號光子的

偏振態： $|\varphi\rangle_1 = \alpha|H\rangle_1 + \beta|V\rangle_1$ 與

$|\xi\rangle_2 = \gamma|H\rangle_2 + \delta|V\rangle_2$ (H 與 V 分別代表水平與垂

直線性偏振， $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ， $|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$)，我們

得到

$$|\phi_f\rangle = \frac{i}{2\sqrt{2}} [(\alpha\gamma + \beta\delta)|\Phi^+\rangle + (\alpha\gamma - \beta\delta)|\Phi^-\rangle + (\alpha\delta + \beta\gamma)|\Psi^+\rangle + (\alpha\delta - \beta\gamma)|\Psi^-\rangle] (|c\rangle_1 |c\rangle_2 + |d\rangle_1 |d\rangle_2) + \frac{1}{2\sqrt{2}} |\Psi^-\rangle (|d\rangle_1 |c\rangle_2 - |c\rangle_1 |d\rangle_2) \quad (6)$$

其中

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_1 |H\rangle_2 \pm |V\rangle_1 |V\rangle_2), \quad (7)$$

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_1 |V\rangle_2 \pm |V\rangle_1 |H\rangle_2), \quad (8)$$

為光子的四種偏振糾纏態，稱為貝爾態；上面的結果告訴我們，在分光器的出口（對應 c 與 d 空間模式處）設置單光子探測器，如果二個探測器同時偵測到光子（稱符合光子，或簡稱符合（coincidence）），則

雙光子的偏振態將被投影至糾纏態 $|\Psi^-\rangle$ ，這也意謂

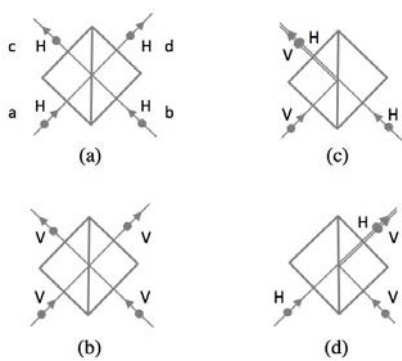
著藉由雙光子的出射型態，我們可以辨別 $|\Psi^-\rangle$ 與其他三種貝爾態。如再分析雙光子的偏振型式，我們可以進一步區分 $|\Psi^+\rangle$ 與 $|\Phi^\pm\rangle$ ；加入雙通道的偏振器

（polarizer）於分光器的兩側，只有 $|\Psi^+\rangle$ 可以讓分光器其中一邊偏振器的兩通道出口的探測器同時偵測到光子。

在量子傳態（quantum teleportation）的方案中[3]，貝爾態量測扮演了重要的角色；貝爾態量測意指兩粒子任意的量子態投影至四種貝爾態基底上；利用上述的偏振糾纏光子分析方法，我們可以區分 $|\Psi^-\rangle$ 、 $|\Psi^+\rangle$ 與 $|\Phi^\pm\rangle$ ，貝爾量測成功率為百分之五十，這也使得實驗量子傳態具有百分五十的成功率[12]。

三、雙光子在偏振分光器上的干涉與多光子偏振糾纏態

偏振分光器透射水平偏振光，並反射垂直偏振光；當光子經過偏振分光器後， $|H\rangle|a\rangle$ 會轉換成 $|H\rangle|d\rangle$ ，而 $|V\rangle|a\rangle$ 會轉換成 $|V\rangle|c\rangle$ ，相同的道理，偏振分光器分別轉換 $|H\rangle|b\rangle$ 及 $|V\rangle|b\rangle$ 為 $|H\rangle|c\rangle$ 與 $|V\rangle|d\rangle$ ；為了表示上的方便，之後我們將量子態 $|H\rangle|a\rangle$ 寫為 $|H\rangle_a$ ，對其他符號亦同；現在我們考慮具有不同空間模式的雙光子同時入射於偏振分光器的情形[13,14,15]，如果兩個光子具有相同的偏振態，則雙光子的出射態將具有不同的空間模式，如圖二(a)、(b)所示，對於相反的情況，我們則會看到雙光子的出射態會具有相同的空間模式，如圖二(c)或(d)所示；所以，在各個出口空間模式各發現一個光子的情形，恰對應於量子態在 $|H\rangle_a|H\rangle_b$ 與 $|V\rangle_a|V\rangle_b$ 所展開的子空間中的投影，更進一步地，如果射出的雙光子不在 H 與 V 的基底下量測，其量子態會是 $|H\rangle_a|H\rangle_b$ 與 $|V\rangle_a|V\rangle_b$ 的同調疊加態。



圖二：雙光子入射於偏振分光器與其四種射出型態

利用上述偏振分光器對雙光子的轉換特點，我們

可以進行偏振糾纏光子分析[15]與成功率百分之五十的貝爾態量測[16]，除此之外，亦可以用來備製多光子偏振糾纏態。例如，我們可以利用下述的方式，產生四光子 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) [17]偏振糾纏態[8]：首先，產生兩對偏振糾纏光子

$$|\Psi\rangle_{abcd} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_a|V\rangle_b - |V\rangle_a|H\rangle_b) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_c|V\rangle_d - |V\rangle_c|H\rangle_d) \quad (9)$$

之後，讓 b 與 c 模式的兩光子在偏振分光器上干涉，並在二出口處偵測符合光子，這使得量子態 $|\Psi\rangle_{abcd}$ 投影至 $|H\rangle_a|V\rangle_b|V\rangle_c|H\rangle_d$ 與

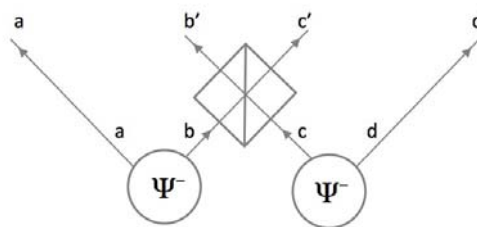
$|V\rangle_a|H\rangle_b|H\rangle_c|V\rangle_d$ 展開的二維子空間裡，是故偵測

在在偏振分光器後的四光子符合會對應於量子態：

$$|\Psi\rangle_{ab'c'd} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_a|V\rangle_{b'}|V\rangle_{c'}|H\rangle_d - |V\rangle_a|H\rangle_{b'}|H\rangle_{c'}|V\rangle_d) \quad (10)$$

即四光子 GHZ 偏振糾纏態；如圖三所示。利用相同的方法，亦可以產生六光子 GHZ 偏振糾纏態以及六光子偏振圖態 (graph state) [9]。

當糾纏光子與環境交互作用，產生去相干時，糾纏態就不再是原來的純態，這時就需要利用糾纏純化 (entanglement purification[13])，將大量的糾纏混合態，藉由雙光子的干涉與條件式的量測，產生數目較少但純度較高的糾纏光子對；糾纏光子純化的核心也是利用上述的偏振分光器對雙光子的轉換特點[13]，實驗上也驗證了糾纏純化的原理[14]。



圖三：四光子 GHZ 偏振糾纏態的備製

四、雙光子的不可區分與量子消除 (quantum erasure)

讓獨立產生出來的光子不可區分而相互干涉，是前述所有方案的必要條件，所以，必須確保光子在分光器與偏振分光器上，具有好的空間 (spatial) 與時間 (temporal) 的重合，消除所有關於二光子的路徑資訊，例如在量子傳態的實驗裡[12]，傳送者與接收者所分享的糾纏光子間具有時間與頻率的強關聯性，因而可以提供干涉光子的路徑資訊 (Welcher-Weg information)。有兩種方法可以消除路徑資訊，達到量子消除；第一種方法，是在短於同調 (相干) 時間的時間間隔裡偵測光子[18]，但由於目前單光子偵測器的低時間解析度，該方法無法被實現；第二種方法是增長干涉光子的同調時間，讓同調時間遠長於干涉光子被產生的時間間距 (pump-pulse duration)，我們可以利用窄帶濾波片，置於單光子探測器前，達到增長同調時間的目的[19]；此外，利用單模光纖耦合器 (single-mode fiber coupler) 做為空間模式過濾器，讓被偵測光子有好的模式重合[7-9,12,14,16]。

五、結語

經由光子的量子不可區分性與光子在分光器及偏振分光器上的干涉，並憑藉著線性光學的器件，我們可以分析且備製多光子糾纏態，探索量子力學基本的原理，演示量子資訊處理的方案；這也促進我們思考，如何更進一步巧妙地利用光子的量子行為與光學器件的特性，使我們深入研究量子關聯性，並且高效率地完成量子資訊方案

參考資料

- [1] J. S. Bell, On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics* 1, 195-200 (1964); reprinted J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum*

Mechanics (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987).

- [2] A. Einstein, B. Podolsky, & N. Rosen, Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.* 47, 777-780 (1935).
- [3] C. H. Bennett et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classic and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.* 70, 1895-1899 (1993).
- [4] C. H. Bennett, Quantum information and computation. *Phys. Today* 48(10), 24-30, October (1995).
- [5] D. Gottesman and I. L. Chuang, Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations. *Nature* 402, 390-393 (1999).
- [6] P. G. Kwiat et al., New high intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.* 75, 4337-4341 (1995).
- [7] D. Bouwmeester et al., Observation of Three-Photon Greenberger-Horne-Zeilinger Entanglement. *Phys. Rev. Lett.* 82, 1345-1349 (1999).
- [8] J.-W. Pan et al., Experimental demonstration of four-photon entanglement and high-fidelity teleportation. *Phys. Rev. Lett.* 86, 4435-4438 (2001).
- [9] C.-Y. Lu et al., Experimental entanglement of six photons in graph states. *Nature Phys.* 3, 91-95 (2007).
- [10] A. Zeilinger, General properties of lossless beam splitters in interferometry. *Am. J. Phys.* 49, 882, 1981.
- [11] J.-W. Pan, Quantum Teleportation and Multi-photon Entanglement. PhD thesis, Durchgeföhrt am Institut für Experimentalphysik der

- Universität Wien.
- [12] D.Bouwmeester et al., Experimental quantum teleportation. Nature 390, 575-579 (1997).
- [13] J.-W. Pan et al., Entanglement purification for quantum communication. Nature 390, 1067-1070 (2001).
- [14] J.-W. Pan et al., Entanglement purification of arbitrary unknown states. Nature 423, 417-422 (2003).
- [15] J.-W. Pan and A. Zeilinger., Greenberger-Horne-Zeilinger-state analyzer. Phys. Rev. A 57, 2208-2211, 1998.
- [16] Q. Zhang et al., Experimental quantum teleportation of a two-qubit composite system. Nature Phys.2, 678–682 (2006).
- [17] D. M.Greenberger, M. A.Horne, A.Shimony, and Zeilinger, A. Bell's theorem without inequalities.Am. J. Phys. 58, 1131-1143 (1990).
- [18] M. Zukowski, A. Zeilinger, M.A. Horne, and A. Ekert, " event-ready-detectors" Bell experiment via entanglement swapping.Phys. Rev. Lett. 71, 4287-4290, 1993.
- [19] M. Zukowski, A. Zeilinger, and H.Weinfurter, Entanglingphotons radiated by independent pulsed source. Ann. NY. Acad. Sci. 755, 91-102, 1995.