



量子去相干及量子糾纏

文/ 周忠憲



量子力學與古典力學之巨大差異在於量子相干及量子糾纏。
本文簡單介紹在開放量子系統中對量子去相干及量子糾纏問題的研究。

一、引言

量子力學是套非常成功的理論在微觀世界的運用上取得了巨大的成功。量子力學的根本方程式是薛丁格方程式。這是一個線性方程式，因此在量子力學中有所謂的態疊加原理(superposition principle)：即如果 $|A\rangle$ 和 $|B\rangle$ 是兩個互相獨立的量子態，那麼它們的任意線性疊加 $\alpha|A\rangle + \beta|B\rangle$ ，其中 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ，也會是一個量子態。在量子資訊的應用範疇中態疊加原理扮演著相當重要的角色。它使得量子資訊儲存器得以用少量的量子位元儲存驚人的資訊量。另外它還提供了量子平行處理(quantum parallelism)的一個可行性方案。所謂的量子平行處理就是對所欲計算的函數與對應自變量的各種可能取值通過量子態疊加原理及量子態間的糾纏特性進行一么正變換

(unitary transformation)，亦即做一量子邏輯運算。而此運算可直接同時作用在所有態上。因此量子運算完全摒除古典運算法則，其容量的平行計算能力是傳統電腦所望塵莫及的。

然而一個重要的問題是：實際上所有的巨觀世界以及微觀世界的系統都是量子力學適用的範疇。然而在我們的日常生活中，我們並未經驗到態疊加原理，我們所熟悉的乃是非此即彼的古典理論。這種由任意疊加態演變為某個對應於測量結果的本徵態則稱之為量子去相干(quantum decoherence)。

因此一個根本的問題是：我們所熟悉的古典理論的世界如何由量子理論的範疇中浮現出來。

二、開放量子系統

對於由量子理論到古典理論的轉變，我們在此僅介紹開放量子系統(open quantum system)的處理方

周忠憲

國立成功大學物理系

國家理論科學研究中心(南區)

E-mail: chouch@mail.ncku.edu.tw

法。簡而言之，開放量子系統是把我們的宇宙分為兩部分，亦即系統 S (system)以及環境 E (environment)。整個宇宙($S+E$)是一個封閉系統，它滿足量子力學的動力學方程。據此我們可以寫下整個宇宙的密度矩陣所滿足的方程式。然而如果我們所感興趣的只是系統 S 本身，我們不去看環境的動力學變數，我們可以把環境的動力學變數積分掉從而得到剩下來的系統 S 化約密度矩陣(reduced density matrix)所滿足的方程。從此方程式的探索給出了在環境影響下所導致的量子去相干以及量子去糾纏。

在開放量子系統的研究中，一個簡單的可解模型是所謂的量子布朗運動(quantum Brownian motion)模型。在此模型中，系統 S 是一個簡諧振子(x)，環境則由一群簡諧振子(q_i)所組成。為了具體精確描述環境的組成，我們還需要譜密度函數(spectral density function)。系統與環境的交互作用則是正比於彼此變數的乘積 xq_i 。

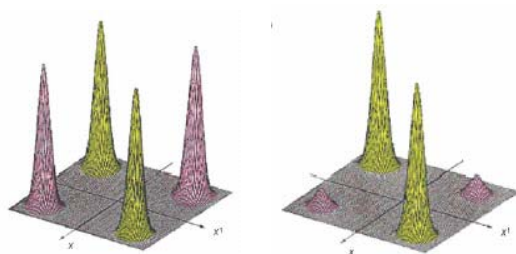
Feynman 以及 Vernon[1]在 1963 年首先用路徑積分的方法研究這個問題。他們假設環境一開始處於某一溫度的熱平衡態。因為只對系統感興趣，他們可以把環境變數完全積分掉，得到了所謂的影響泛函(influence functional)。它包含了所有環境對系統的作用影響。它也清楚顯示出導致耗散(dissipation)以及弛豫(relaxation)項的起源並滿足漲落-耗散關係(fluctuation-dissipation relation)。從這裡可以看出化約密度矩陣的隨時間演化過程是非馬可夫的(non-Markovian)。

在 1983 年 Caldeira 和 Leggett[2]在做了高溫近似以及馬可夫近似，並假設環境的表現行為是歐姆式的(Ohmic)，他們得到了在此條件下的化約密度矩陣之演化方程式。

從這個方程式可以清楚看出為何這個模型會被稱為量子布朗運動模型。在古典布朗運動模型中，我們透過顯微鏡觀察到花粉的無規運動，而其運動的起因是由於大量的水分子迅速撞擊花粉粒子所引起。我們

可以用 Langevin 方程來描述並且寫下相對應的 Fokker-Planck 方程以及得到擴散常數與黏滯係數滿足愛因斯坦關係式。在這個處理中，我們假設環境的漲落是馬可夫的，亦即在不同的時間點，漲落是互相獨立無關的。

在量子布朗運動模型中，將環境變數積分掉相當於不看那些水分子本身而只看系統變數而已。高溫近似則相當於假設水分子的運動及撞擊反應遠快於花粉粒子的運動反應。在同樣作馬可夫近似的假設下，Caldeira 和 Leggett 得到的演化方程類似於古典布朗運動模型的運動方程，亦即 Langevin 方程。而由化約密度矩陣方程所得出的描述 Wigner function 所遵循的方程則可對應到古典的 Fokker-Planck 方程。Wigner 函數則對應到分佈函數(distribution function)。從這方程式中我們可以看出系統的量子態如何量子去相干。如果我們假設系統一開始的空間波函數是兩個高斯函數的疊加，則系統的化約密度矩陣一開始有四個峰(peak)(圖一)。當系統隨時間演化，我們可以看出化約密度矩陣的非對角項隨時間成指數型式衰減。最後僅存對應到古典結果的主對角項。



圖一：兩高斯態疊加之密度矩陣隨時間之演化。

左圖為剛開始時在位置表象之化約密度矩陣，右圖為經環境影響一段時間後之情形，可以看出非對角部分以部分去相干。

而且由指數衰減的速率，我們可以定義系統受環境影響下的量子去相干時間尺度。對於一公克的粒子在室溫(300K)的環境下，如果系統一開始的空間波函數是兩個中心相差一公分的高斯函數的疊加，則此系

統的去相干時間比弛豫時間短了十的四十次方倍。這也大致說明了為何在日常生活中為何察覺不到量子態的疊加。

Unruh 以及 Zurek[3]在 1989 年將 Caldeira 和 Leggett 的結果推廣到包括低溫的範圍而不僅僅是侷限在高溫的情況下，但還是用了馬可夫近似並假設環境的表現行為是歐姆式的(Ohmic)。直到 1992 年 Hu, Paz 以及 Zhang[4]才得到化約密度矩陣在非馬可夫過程，一般的環境表現行為，在任意溫度下的演化方程。這個方程揭示了在低溫時，某些環境的特性將有助於減緩量子去相干的過程。另外，它也顯示出某些情況下，非馬可夫的效應相當重要，其表現行為和做了馬可夫近似的結果有非常顯著的不同。

從這一簡單的模型，我們可以從開始的哈密頓量一直推導出系統的化約密度矩陣所須遵循的演化方程而無需做馬可夫近似。我們也可以清楚看出為何在室溫下，普通的物體看不到量子疊加效應。這個模型給出了量子去相干隨時間演化的過程，並在開放量子系統的研究中，給予環境誘發去相干(environment-induced decoherence)過程做了清楚明白的具體實現。

三、量子糾纏

除了量子去相干性之外，量子理論與古典理論之間還有一非常顯著的巨大差異：量子糾纏(quantum entanglement)。薛丁格在 1935 年寫到[5]：

我不會說[量子糾纏]是量子力學的特性之一，反而要稱其是量子力學的典型特徵。也就是這迫使得我們完全的悖離了古典的思路。

那麼到底什麼是量子糾纏呢？

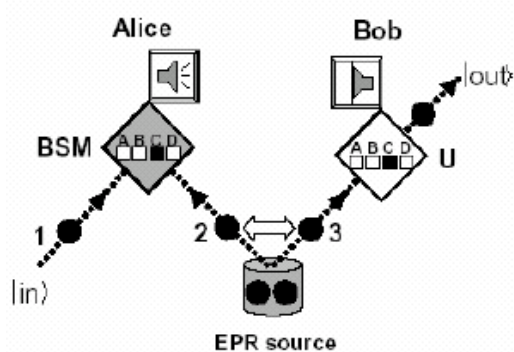
簡單的說就是指兩個或多個量子位元之間存在的非古典關聯。例如兩個粒子可以形成糾纏態(entangled state)，如果此二粒子系統的態不能分解成各自粒子狀態的張量乘積(tensor product)。比如說 $|00\rangle + |11\rangle$ 就是一個量子糾纏態，而

$$|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle =$$

$(|0\rangle + |1\rangle) \times (|0\rangle + |1\rangle)$ 不是一個量子糾纏態。因為糾纏態的特性是不能分解成單獨粒子態的乘積，因此糾纏態內的組成粒子間具有很強的關聯性(correlation)。其中的一個組成粒子狀態被改變或測量將同時決定了糾纏態內所有其它粒子狀態的相應變化。量子糾纏的另一個特點就是此關聯是非定域性(non-local)的。

量子糾纏除了在量子運算提供有效平行處理方法外，它也為量子通訊提供了必備的工具，例如量子位元協定等。如今我們已經把量子糾纏當成是一極為有用的資源。例如量子糾纏的這種非定域性是實現量子傳送(quantum teleportation)、超密集編碼(supersense coding)以及量子密碼學(quantum cryptography)中的量子密鑰分佈(quantum key distribution)等應用的理論基礎。

量子糾纏(Quantum Entanglement)的一個有趣的應用是所謂的量子傳送(Quantum Teleportation) [6]。這是個激發科學想像的有趣應用。對科幻迷而言，這就相當於星艦奇航記(Star Trek)中從企業號太空船(Enterprise)傳送到某一星球表面的具體實現。



圖二：量子傳送基本工作原理示意圖。1 為所欲傳送之未知量子態，2-3 為一量子糾纏對。

其基本原理如下[圖二 1]：

假設有一量子糾纏態由兩個二能階粒子(A,B)所

組成。為簡化討論我們假設這是個 EPR 態。位於 A 點之愛麗絲(Alice)與 B 點之鮑伯(Bob)各自分別擁有其中的一個組成粒子 A 與 B。今 Alice 欲將另一個粒子 C 上所體現的未知量子態 $|\Psi\rangle$ 傳送給 Bob。她不必真的把 C 這個粒子傳送出去，她僅僅須要把粒子 C 與她手中擁有的粒子 A 做一個所謂的貝爾測量(Bell measurement)，然後將測量結果以古典通訊方式告知 Bob。因為粒子 A 和粒子 B 原先處於 EPR 態，Alice 將粒子 A 與粒子 C 做貝爾測量時會對在 Bob 手中的粒子 B 造成影響。

Bob 根據 Alice 以古典通訊告知他的結果對他手中之粒子做一些操作就可以把此未知量子態 $|\Psi\rangle$ 重現在他所持有的粒子 B 上。整個過程所須要的只是一個共同擁有的 EPR 態以及做聯合測量與古典通訊的能力。在量子傳送中，物質粒子 C 本身並未真的被傳送。但是透過與一量子糾纏態粒子 A 的貝爾測量，我們可以把量子態的訊息傳遞到原先與 A 是 EPR 糾纏態的粒子 B 上。這麼方案並未違反量子無法複製定理(Quantum no cloning theorem)。因為在把未知量子態傳送到 Bob 之後，在粒子 C 上的量子態已非原先之量子態 $|\Psi\rangle$ 了。這個方案也沒有違背相對論原理。因為在量子傳送的過程中我們還需要靠 Alice 運用古典通訊告知 Bob 測量結果，所以量子傳送並非超光速傳遞。在 1997 年，實驗上已證實了這個方案的可行性[7]。後續有許多的實驗討論，但都是在地球表面的實驗室內進行的。目前一個有趣的建議是希望能在地表的實驗室與在地球軌道上的太空站間進行量子傳送。如果技術上能克服，我們就朝星艦奇航記中的夢想更進一步。

聽起來很棒，不是嗎？但是這裡面有幾個環節應該仔細考慮。我們已經知道環境對系統的交互作用會引發系統的量子去相干過程，從而使系統的行為表現趨於古典。在古典物理的範疇內是不存在量子糾纏態的。因此一個自然的問題即是在從量子世界到古典世界行為的轉變中，環境與系統的交互作用如何導致系統量子糾纏特性的喪失，或者說是量子去糾纏

(quantum disentanglement)。

既然我們將量子糾纏視為有用的資源，量子去糾纏的研究就是一個有著根本重要性的課題。因為在上述所提到的各種應用中，量子糾纏是其理論的基礎。若是由於環境與系統的交互作用導致了量子去糾纏，則在實際應用上，人們就必須先做純化來提高系統的糾纏程度。

在量子糾纏的研究中，一個重要的問題是量子糾纏的測度(entanglement measure)。我們希望能找到一個簡單的泛函算子，通過它我們可以很快判定一個量子態究竟是不是糾纏態，以及如果是的話，那它的糾纏程度到底有多少。透過這樣的一個糾纏測度，人們就可以比較兩個量子態的糾纏程度。有了方便運算的糾纏測度，人們才得以研究在開放量子系統中的量子糾纏隨時間的演化情形，亦即量子糾纏態的動力學(dynamics of quantum entangled states)問題。對於糾纏測度這個問題的一般情形(n 部分，能階數為有限或無限，純態或混合態)，目前尚未得到完全的解決。

但是在由兩個二能階粒子所組成的系統中，有個通用的糾纏測度，Wootter's concurrence function[8]。通過這個糾纏測度，人們得以研究二能階系統的量子去糾纏問題。Yu 以及 Eberly[9]在 2004 年研究了放置在不同空腔內的二能階系統的量子糾纏態動力學。他們發現在某些情形下，系統迅速在有限時間內就失去量子糾纏性質了，他們把這個現象稱之為猝死(sudden death)。令人驚訝的是在某些量子糾纏態猝死的情形下，系統居然可以一直保持著量子相干性。最近的研究顯示了猝死之後的量子態在過一段時間後有可能再變成糾纏態。這標示著環境對系統的作用造成了關聯在系統內以及系統與環境之間交互建立轉移。關於量子糾纏態動力學的研究正在進行中。

在量子布朗運動模型的研究中，人們發現了在低溫下非馬可夫過程對量子去相干的重要性。要探討量子去糾纏的問題，Chou, Hu 以及 Yu[10]將量子布朗運動模型推廣到系統是由兩個簡諧振子所組成，並找到

在一般環境中，任意溫度下的化約密度矩陣所遵循的演化方程式。

四、實驗展望

既然量子糾纏態是實現各種量子科技應用方案的基礎，如何在實驗室中依照人們的意願來產生這些糾纏態就成了迫切的問題。目前在量子糾纏態的實驗進展上，研究的物理系統主要有 trapped atomic ions[11]，在光學晶格中的冷原子(cold atom in optical lattices)[12]，空腔量子電動力學(cavity QED)[13]，超導量子位元(superconducting quantum bits)[14]，以及半導體中的單一自旋(single spin in semiconductors)[15]等等。

目前關於量子去相干及量子糾纏的研究探討以及在量子科技上的應用實現正蓬勃發展，許多大學及研究機構亦投注大量資源在相關領域。藉由各這方面的進展，人們對於量子世界與古典世界的關係將有更深刻的體驗與認識。

參考文獻

- [1] R. P. Feynman and F. L. Vernon, Ann. Phys.(N.Y.) 24, 118 (1963).
- [2] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Ann. Phys.(N.Y.) 149, 374 (1983).
- [3] W. G. Unruh and W. H. Zurek, Phys. Rev. D40, 1071 (1989).
- [4] B. L. Hu, J. P. Paz, and Y.-H. Zhang, Phys. Rev. D 45, 2843 (1992).
- [5] 原文為 “I would not call [entanglement] one but rather the characteristic trait of quantum mechanics, the one that enforces its entire departure from classical lines of thought”, - Schrodinger (1935).
- [6] Charles H. Bennett et al., Phys. Rev. Lett. 70, 1895 (1993).
- [7] D. Bouwmeester et al., Nature 390, 575 (1997).
- [8] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 80, 2245 (1998).
- [9] T. Yu and J. H. Eberly, Phys. Rev. Lett. 93, 140404 (2004)
- [10] C. H. Chou, B. L. Hu and T. Yu, Phys. Rev. E 77, 011112 (2008).
- [11] R. Blatt and D. Wineland, Nature 453, 1008 (2008).
- [12] I. Bloch, Nature 453, 1016 (2008).
- [13] H. J. Kimble, Nature 453, 1023 (2008).
- [14] J. Clarke and F. K. Wilhelm, Nature 453, 1031 (2008).
- [15] R. Hanson and D. D. Awschalom, Nature 453, 1043 (2008).