2009年全國中學生力學競賽決賽考題

全部為填充題，答錯不倒扣，總分100分。可以使用小型計算機。
所有數值答案若有單位請一起寫出，但不須寫正負號或方向。
數值答案在合理的誤差範圍內都給題分。
請自行利用本試題卷空白部份或背面作為計算空間。
請將答案填入另外發給的答案卷內。

1. 下表為國際單位系統（SI單位系統）中的七個基本單位，其他單位都可由這些基本單位表示出來，稱為導出單位；譬如力量的單位為 $\mathrm{kg \cdot m/s^2}$ ，稱之為牛頓（N）。在美國，ft-lb-s單位系統是工業界常使用的單位系統；國內工業界也常有「美規」製程或產品使用此種系統。在此系統中，與力學較有關係的基本量是長度、力量、及時間，其中長度的單位是英呎（ft, 1 ft = 30.48 cm），力量的單位是磅（lb, 2.205 lb = 1 kgw），而時間的單位是秒（s）。
（問題a, 3%）在ft-lb-s單位系統中，質量是導出單位，請問此質量單位如何以基本單位表示？
（問題b, 3%）在ft-lb-s單位系統中，前述質量單位稱為slug，請問一個slug等於多少kg？
（問題c, 3%）以SI單位系統表示時，水的質量密度的數值為1000（$\mathrm{kg/m^3}$），請問以ft-lb-s系統表示時，應為多少？

基本量	基本單位
長度	m
質量	kg
時間	s
電流	A
溫度	K
物質數量	mol
發光強度	cd

參考解答：
（問題a） $\mathrm{lb \cdot s^2/ft}$
（問題b） 14.6 kg
（問題c） $1.94\,\mathrm{slug/ft^3}$ （或 $1.94\,\mathrm{lb \cdot s^2/ft^4}$ ）

詳細說明：
（問題a）單位系統必須符合物理法則，由牛頓運動定律 $m = F/a$ ，其中力量單位為lb，而加速度單位為 $\mathrm{ft/s^2}$ ，則質量的單位為 $\mathrm{lb \cdot s^2/ft}$ （此單位稱為slug，亦即1 slug = 1 $\mathrm{lb \cdot s^2/ft}$ ）。
（問題b）同理若以m, N, s為基本單位，則所導出的質量單位為 $\mathrm{N \cdot s^2/m}$ ，亦即1 kg = 1 $\mathrm{N \cdot s^2/m}$ 。本問題1 slug = ? kg 相當於1 $\mathrm{lb \cdot s^2/ft}$ = ? $\mathrm{N \cdot s^2/m}$ 。單位換算如下

$$1\ \frac{\mathrm{lb \cdot s^2}}{\mathrm{ft}} = 1\ \frac{\mathrm{lb \cdot s^2}}{\mathrm{ft}} \cdot \frac{9.81\ \mathrm{N}}{2.205\ \mathrm{lb}} \cdot \frac{1\ \mathrm{ft}}{0.3048\ \mathrm{m}} = 14.6\ \frac{\mathrm{N \cdot s^2}}{\mathrm{m}}$$

亦即

$$1\ \mathrm{slug} = 14.6\ \mathrm{kg}$$

（問題c）水的質量密度

$$1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} = 1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot \frac{1\ \mathrm{slug}}{14.6\ \mathrm{kg}} \cdot \left(\frac{0.3048\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{ft}}\right)^3 = 1.94\ \frac{\mathrm{slug}}{\mathrm{ft^3}}$$

2. 想像一張有四根桌腳的桌子，桌腳是由某種材料作成。這些桌腳承受外力*F*時，伸縮量δ與外力*F*之間的關係為

$$\delta = \frac{FL}{AE}$$

其中*A*為桌腳斷面積，*L*為桌腳長度，*E*稱為彈性模數（elastic modulus）。你可以將上式視為彈簧的虎克定律的延伸，並將此式寫成。

$$F = k\delta,\ \ k = \frac{AE}{L}$$

亦即桌腳承受外力時，其伸縮量可以視為彈簧來計算。已知這些桌腳材料的彈性模數為 $E = 13\text{ GPa}$ ；四根桌腳的斷面積都是$1\text{ cm}\times 1\text{ cm}$的正方形；其中三根的長度為1000 mm而第四根則是多了0.50 mm，以致於桌子有點搖晃。現將一質量為290 kg的重物放在桌面上，並適當地調整置放的位置，而能使桌面完全保持水平。
（問題a, 6%）請問此時四根桌腳中最大壓縮量為多少？
（問題b, 6%）請問此時四根桌腳中最小壓縮量為多少？
註：在實際測試時，如此細長的桌腳可能在還未達到公式所描述的壓縮量之前就發生了「挫曲」（buckling）現象。在此我們假設挫曲現象並沒有發生。

參考解答：
（問題a）0.923 mm
（問題b）0.423 mm

詳細說明：
依題意，較短的三根桌腳有相同的壓縮量（假設為δ_3)；而第四根有較大的壓縮量δ_4，其關係為

$$\delta_4 = \delta_3 + 0.5\text{ mm}$$

或

$$\frac{F_4 L_4}{AE} = \frac{F_3 L_3}{AE} + 0.5\text{ mm} \qquad \text{(a)}$$

此外，由靜力平衡

$$3F_3 + F_4 = Mg \qquad \text{(b)}$$

將數值代入(a), (b)可以整理如下（其中$M = 290\text{ kg}$, $g = 9.81\text{ m/s}^2$ ）

$$F_4 - F_3 = 650\text{ N}$$

$$F_4 + 3F_3 = 2845\text{ N}$$

解得$F_3 \approx 550\text{ N}$ ，$F_4 \approx 1200\text{ N}$ 。壓縮量計算如下

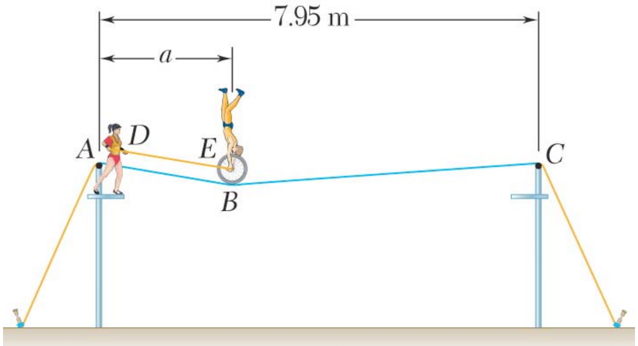
$$\delta_4 = \frac{F_4 L_4}{AE} = 0.000923\text{ m} = 0.923\text{ mm}$$

$$\delta_3 = \frac{F_3 L_3}{AE} = 0.000423\text{ m} = 0.423\text{ mm}$$

3. 在某一特技表演節目中，表演者在助理的協助下，在 $a = 2.5$ m 處保持平衡狀態，如下圖所示。已知表演者的重量為80 kgw，AC兩點間的直線距離是7.95 m，受力變形後的鋼索ABC的長度是8.00 m。

（問題a, 4%）請問此時鋼索ABC的張力是多少牛頓？

（問題b, 4%）請問此時助理手持的繩索DE的張力是多少牛頓？



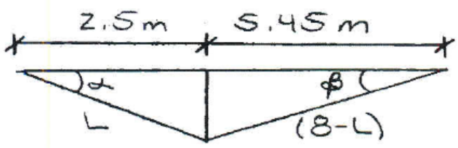
參考解答：

（問題a）3300 N

（問題b）36 N

詳細說明：

由幾何關係可以解出鋼索的傾斜角度

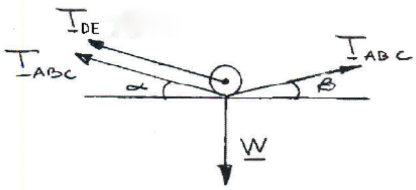


$$L^2 - (2.5)^2 = (8 - L)^2 - (5.45)^2$$

$$L = 2.5342$$

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{2.5}{2.5342} = 9.4237^o$$

$$\beta = \cos^{-1}\frac{5.45}{8 - 2.5342} = 4.3576^o$$



由靜力平衡可以解出鋼索ABC的及繩索DE的張力

$$(T_{ABC} + T_{DE})\cos\alpha - T_{ABC}\cos\beta = 0$$

$$(T_{ABC} + T_{DE})\sin\alpha + T_{ABC}\sin\beta = 80(9.81)$$

代入α，β後可得到

$$0.9865T_{DE} + 0.0106T_{ABC} = 0$$

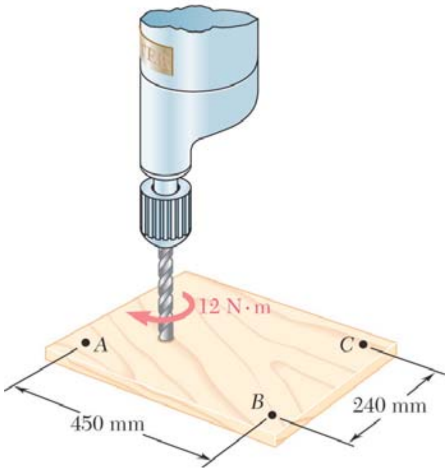
$$0.1637T_{DE} + 0.2397T_{ABC} = 784.8$$

解得張力分別為

$$T_{ABC} \approx 3300 \text{ N}$$

$$T_{DE} \approx 36 \text{ N}$$

4. 一木板平放在一工作台上，並利用電鑽鑽孔，如下圖所示。電鑽施加在木板上除了垂直力上還有一扭力（torque），其大小為 12 N·m ，如圖所示。假設木板與工作台間的摩擦力很小可以忽略。為了不讓木板在水平面上移動，現想要以兩根相同的小鐵釘釘在木板上。
（問題a, 4%）若要使小鐵釘承受最小力量，應該釘在下列哪兩個位置，*A*及*B*？ *B*及*C*？ 或者是*A*及*C*？
（問題b, 6%）此最小力量，其數值為多少牛頓？



參考解答：
（問題a）*A*及*C*
（問題b）23.5 N

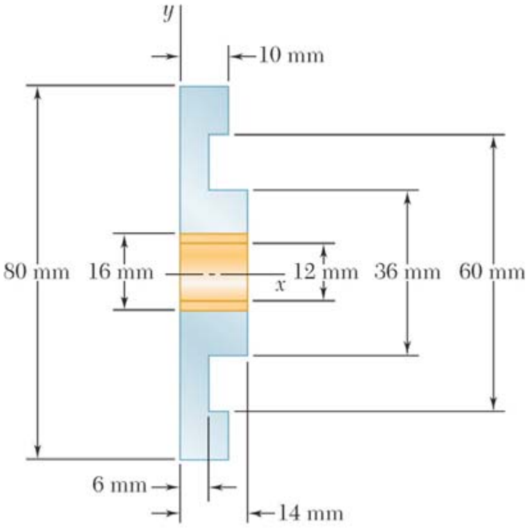
詳細說明：
將木板視為自由體，考慮水平平移的靜力平衡及水平轉動的靜力平衡。在水平面上，唯一的力量來自於兩支小鐵釘施加於木板的力量；由靜力平衡可知這兩個力量必定大小相同方向相反。而且這兩個力所構成的力偶（couple）必定和電鑽施加在木板上的扭力互相平衡（木板才不會轉動），亦即

$$F \cdot d = M$$

其中*F*為每支小鐵釘施加於木板的力量，*d*為兩支小鐵釘之間的距離，*M*為電鑽施加在木板上的扭力（12 N·m）。故若要使*F*為最小，*d*必須最大，亦即釘在*A*及*C*。

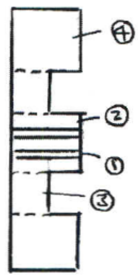
釘在*A*及*B*時， $F = M/d = 12/0.45 = 26.7$ N
釘在*B*及*C*時， $F = M/d = 12/0.24 = 50$ N
釘在*A*及*C*時， $F = M/d = 12\Big/\sqrt{(0.45)^2 + (0.24)^2} = 23.5$ N

5. 下圖為一滑輪組件的斷面圖，中間部份為中空（外徑16 mm，內徑12 mm）的軸襯（bushing），其材料為銅，密度為8000 kg/m^3 ；其他部份為塑膠，密度為1250 kg/m^3 。（問題a, 8%）請計算此滑輪組件質心位置的x坐標值（坐標軸如圖所示）。



參考解答：
（問題a）5.35 mm

詳細說明：
將組件分為四個部份，如右圖所示，每個部份質量及質心位置計算如下：



$$m_1 = 8800 \cdot \left[\frac{\pi}{4}(0.016^2 - 0.012^2) \cdot 0.014 \right] = 0.0108372 \text{ kg}, \ \bar{x}_1 = 7 \text{ mm}$$

$$m_2 = 1250 \cdot \left[\frac{\pi}{4}(0.036^2 - 0.016^2) \cdot 0.014 \right] = 0.0142942 \text{ kg}, \ \bar{x}_2 = 7 \text{ mm}$$

$$m_3 = 1250 \cdot \left[\frac{\pi}{4}(0.060^2 - 0.036^2) \cdot 0.006 \right] = 0.0135717 \text{ kg}, \ \bar{x}_3 = 3 \text{ mm}$$

$$m_1 = 1250 \cdot \left[\frac{\pi}{4}(0.080^2 - 0.060^2) \cdot 0.010 \right] = 0.0274889 \text{ kg}, \ \bar{x}_4 = 5 \text{ mm}$$

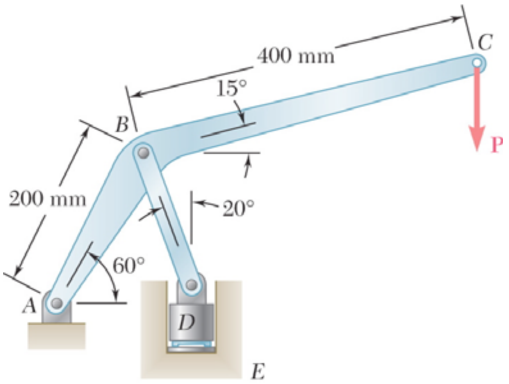
整體組件的質心位置為：

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = 5.35 \text{ mm}$$

6. 下圖為一用來壓製浮雕的機械，圖中的小圓點表示可以自由轉動的樞紐（hinge），摩擦力可以忽略。將欲壓製的工件放在*E*處，在*C*處施加*P*的力量後，此機構會將一垂直力施加在工件上。已知某一浮雕的壓製需要900 N的垂直力施加在工件上。

（問題a, 5%）請問所需要的力量*P*有多大？

（問題b, 5%）此時支點A施加在機械桿件上的力有多大？



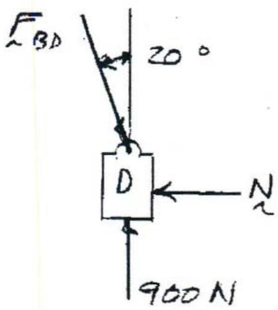
參考解答：

（問題a）301.7 N

（問題b）682.1 N

詳細說明：

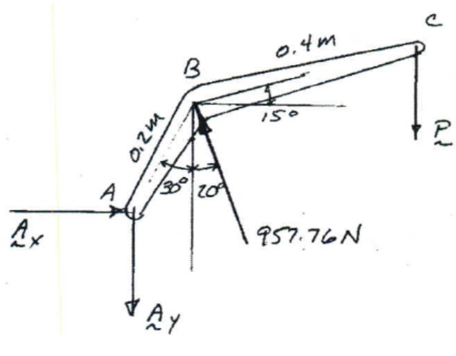
取*D*為自由體（如右圖），由垂直靜力平衡可以計算桿件*BD*所承受的力



$$900\text{ N} - F_{BD}\cos 20^o = 0$$

$$F_{BD} = 957.76\text{ N}$$

再取*ABC*為自由體（如右圖），對*A*點取力矩平衡可以計算*P*



$$\begin{aligned} & 957.76\cos 20^o(0.2\sin 30^o) \\ + & 957.76\sin 20^o(0.2\cos 30^o) \\ = & P(0.2\sin 30^o + 0.4\cos 15^o) \end{aligned}$$

$$P = 301.70\text{ N}$$

*A*點反力則可以由水平力及垂直力平衡計算

$$A_x - 957.76\sin 20^o = 0$$

$$A_x = 327.57\text{ N}$$

$$-A_y + 957.76\cos 20^o - 301.70 = 0$$

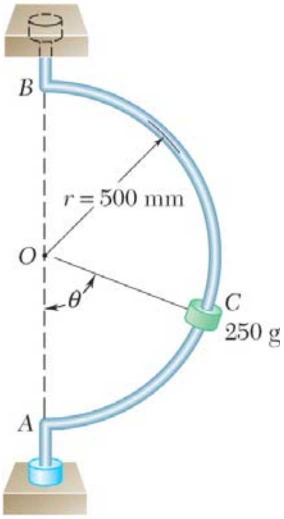
$$A_y = 598.30\text{ N}$$

$$\sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{327.57^2 + 598.30^2} = 682.1\text{ N}$$

7. 下圖中，套管C（質量為250 g）可以沿著半圓形構件自由滑動，兩者之間的摩擦力很小可以忽略。此半圓形構件以7.5 rad/s對著AB做等角速率旋轉（軸承的摩擦力亦可忽略）。

（問題a, 5%）請問當套管C處於穩定狀態時（無任何滑動時），θ角是多少？（$0<\theta<180^o$）

（問題b, 5%）此時套管C作用於半圓形構件的力量多少？



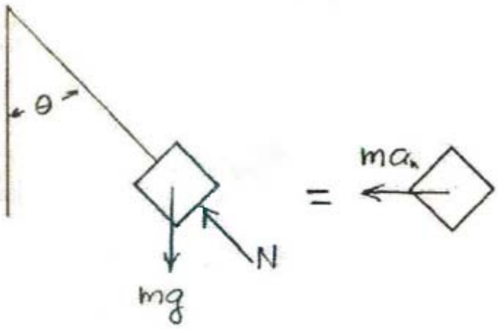
參考解答：

（問題a） 69.6^o

（問題b）7.03 N

詳細說明：

取套管C為自由體，其動力平衡關係如右圖所示。向心加速度為



$$a_n = \rho\omega^2 = (0.5\sin\theta)7.5^2$$

動力平衡方程式為

$$N\sin\theta = ma_n = 0.25(0.5\sin\theta)7.5^2$$
$$N\cos\theta = mg = 0.25(9.81)$$

或

$$N = 7.03125 \text{ N}$$
$$\cos\theta = 0.3488$$
$$\theta = 69.6^o$$

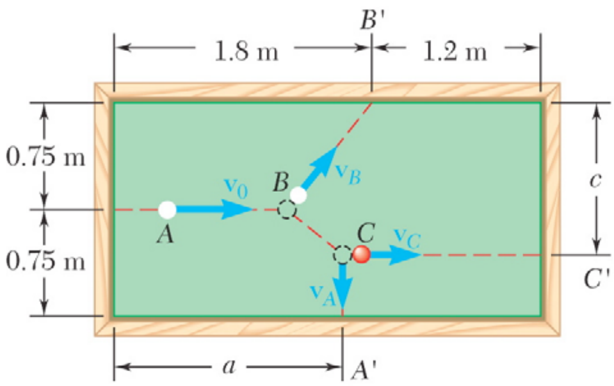
注意，當穩定時，N為套管C與半圓形構件之間唯一的作用力。

8. 有一種撞球遊戲稱為「開侖」(carom)打法：球桌上除了母球外只有另外兩個球（沒有球袋），母球必須連續撞擊到這兩顆球才算得一分。下圖為一「開侖」撞球台，水平桌面上的三顆球質量都一樣。母球A以$v_0 = 4$ m/s 的速度（方向如圖所示）擊出後連續撞擊到B球及C球；A, B, C三顆球分別在不同時刻擊中球台邊緣（cushion）A', B', C'三個位置，如圖所示，其中 $a = 1.65$ m，$c = 1.06$ m。假設球的體積很小，可以視為質點；而且整個過程中摩擦力可以忽略，也沒有任何其他能量損失。

（問題a, 4%）請問A球擊中球台邊緣時的速度大小是多少？

（問題b, 4%）請問B球擊中球台邊緣時的速度大小是多少？

（問題c, 4%）請問C球擊中球台邊緣時的速度大小是多少？



參考解答：

（問題a）1.92 m/s

（問題b）2.40 m/s

（問題c）2.56 m/s

詳細說明：

母球擊出後，整個系統在水平面方向無任何外力，所以動量必會守恆（含線動量及角動量）。此外，依題意，能量也必會守恆。

線動量守恆：

$$4 = v_{Bx} + v_C \qquad (1)$$

$$0 = v_{By} - v_A \qquad (2)$$

對B'點的角動量守恆：

$$0.75(4) = 0.15v_A + 1.06v_C \qquad (3)$$

能量守恆：

$$4^2 = v_{Bx}^2 + v_{By}^2 + v_A^2 + v_C^2 \qquad (4)$$

以上四個方程式可以解出兩組解答

$$v_A = 1.92 \text{ m/s},\ v_{Bx} = 1.44 \text{ m/s},\ v_{By} = 1.92 \text{ m/s},\ v_C = 2.56 \text{ m/s}$$

或

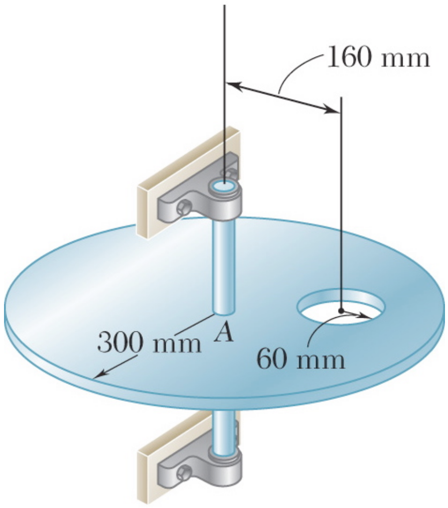
$$v_A = -1.70 \text{ m/s},\ v_{Bx} = 0.93 \text{ m/s},\ v_{By} = -1.70 \text{ m/s},\ v_C = 3.07 \text{ m/s}$$

只有第一組解答符合已知條件，故捨棄第二組解答。B球速度大小為

$$v_B = \sqrt{1.44^2 + 1.92^2} = 2.4 \text{ m/s}$$

註：雖然A, B, C三顆球分別在不同時刻擊中球台邊緣，四個方程式等號右邊的速度發生在不同時間點，這似乎違反守恆定律的應用（等號兩邊須分別代表固定的時間點）。但是你可以這樣想像：將球台邊緣拆除後，這三顆球會以此速度永恆地運動。

9. 下圖為一個半徑300 mm的圓盤繞著圓心*A*在水平面上做等角速率旋轉。若沒有在圓盤上挖孔的話，此旋轉應不會對垂直軸有任何水平力的負荷。今天在圓盤上挖了一個半徑60 mm的洞，如圖所示，挖洞後圓盤總質量為30 kg。則當此圓盤以480 rpm的轉速旋轉時，因為偏心的關係，圓盤對垂直軸有會有一水平力的負荷。
（問題a, 9%）請問此水平力有多大？



參考解答：
（問題a）505 N

詳細說明：
本問題最簡單的思考方式是先算出圓盤質心位置，將所有質量視為集中在質心上（這是牛頓第二運動定律推廣至剛體後的結論之一），然後求旋轉時的「離心力」，即為作用力。因為此問題現在簡化成有如手持一細繩，繩端繫一質點，作旋轉運動。

質心與圓心的距離為

$$\bar{r} = \frac{(0)(\pi 300^2) - (160)(\pi 60^2)}{\pi 300^2 - \pi 60^2} = -6.67 \text{ mm}$$

「離心力」為

$$F = m\bar{r}\omega^2 = (30)(0.00667)(2\pi \times 480/60)^2 = 505 \text{ N}$$

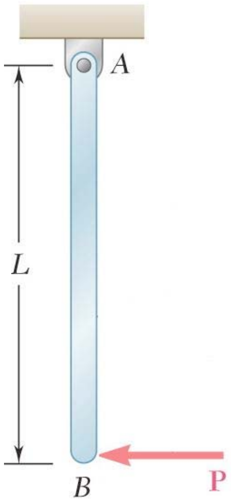
10. 下圖為一細長的桿件AB懸掛在可自由轉動的樞紐A。桿件AB的長度 $L = 0.9$ m ，質量 $m = 1$ kg （對質心的轉動慣量為 $\bar{I} = mL^2/12$ ）。今有一水平力 $P = 3.5$ N 作用在B點，如圖所示。

（問題a, 3%）作用力剛施加上去時，桿件的角加速度大小多少 $\mathrm{rad/s^2}$ ？

（問題b, 3%）作用力剛施加上去時，B點的加速度大小多少 $\mathrm{m/s^2}$ ？

（問題c, 3%）作用力剛施加上去時，桿件作用在支點A的水平力大小多少N？

（問題d, 3%）作用力剛施加上去時，桿件作用在支點A的垂直力大小多少N？



參考解答：

（問題a） 11.67 $\mathrm{rad/s^2}$

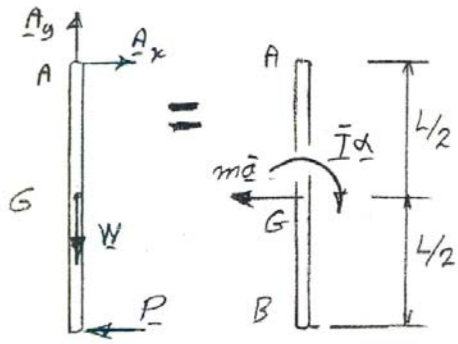
（問題b） 10.5 $\mathrm{m/s^2}$

（問題c） 1.75 N

（問題d） 9.81 N

詳細說明：

以桿件為自由體，牛頓第二運動定律應用在此剛體上如下圖所示。右圖中，等號左邊為作用在此桿件上的所有力，而等號右邊為 $m\bar{\mathbf{a}}$ 及 $\bar{I}\alpha$ （稱為等效力，其反號稱為慣性力或假想力），其中 $\bar{\mathbf{a}}$ 為質心的加速度， α 為桿件的角加速度。注意， $m\bar{\mathbf{a}}$ 係作用在質心上，這是牛頓第二運動定律推廣至剛體的結論之一。此外，我們知道 $\bar{\mathbf{a}}$ 的方向必定是水平的，因為作用力剛施加上去時，桿件是靜止的，所以加速度沒有向心的分量（向心加速度分量等於至轉動中心的距離乘以角速度的平方）。最後還有一個重點，此切線加速度 $\bar{a}$ 與角加速度 α 之間有一運動學關係： $\bar{a} = (L/2)\alpha$ 。



此外，你必須確實了解上圖中的「等號」所代表的涵義：它代表兩組力體系是「等效」的，亦即

$$\left(\sum F_x\right)_{Left} = \left(\sum F_x\right)_{Right}$$
$$\left(\sum F_y\right)_{Left} = \left(\sum F_y\right)_{Right}$$
$$\left(\sum M\right)_{Left} = \left(\sum M\right)_{Right}$$

現在，對A點取力矩

$$PL = m\bar{a}\cdot\frac{L}{2} + \bar{I}\alpha$$

或

$$PL = m\left(\frac{L\alpha}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right) + \left(\frac{mL^2}{12}\right)\alpha$$

可以解出角加速度

$$\alpha = \frac{3P}{mL} = \frac{3(3.5)}{(1)(0.9)} = 11.67\ \text{rad/s}^2$$

B點的加速度則是（同理，沒有向心分量，方向是水平的）

$$a_B = L\alpha = (0.9)(11.67) = 10.5\ \text{m/s}^2$$

反力則可以由力平衡解出

$$A_x - P = -m\bar{a}$$
$$A_y - mg = 0$$

或

$$A_x = P - m\bar{a} = 3.5 - (1)(0.45\times 11.67) = -1.75\ \text{N}$$
$$A_y = mg = (1)(9.81) = 9.81\ \text{N}$$

註：反力 A_x 與 A_y 事實上是支點作用於桿件的力，但此數值等於桿件作用於支點的力，只是方向相反而已。