

2009年全國中學生力學競賽初賽考題

全部是單選題，共20題，答對給題分，未答給0分，答錯倒扣題分之1/5，
請將適當的答案填入本競賽所發給的答案卡內
請自行利用本試題卷空白部份或背面作為計算空間

1. (4%) 彈性球之恢復係數的定義為：自空中落地後反彈的速度 v_f 與落地時速度 v_i 的比值，即恢復係數 $r = v_f/v_i$ 。一般籃球比賽使用的籃球，裁判會將籃球舉至頭頂後，放手使其自由落下，若球反彈後高度到達胸口，則此時球的彈性符合標準。若裁判頭頂高度180 cm，胸口高度160 cm，則彈性符合標準的籃球之恢復係數是多少？

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{8}{9}$ (E) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

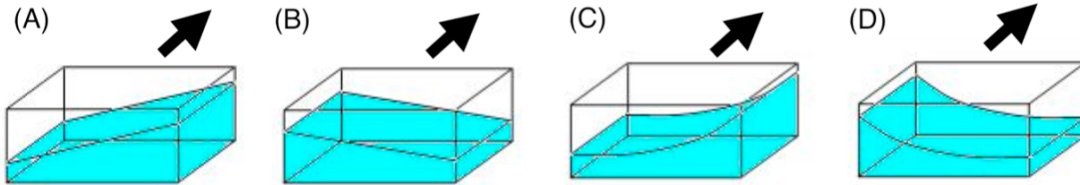
參考解答：(E)

$$v_i = \sqrt{2g \times 1.8}$$

$$v_f = \sqrt{2g \times 1.6}$$

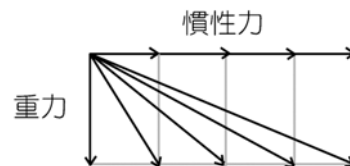
$$r = \frac{v_f}{v_i} = \sqrt{\frac{2g \times 1.6}{2g \times 1.8}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

2. (4%) 小明抱著一長方體形的魚缸坐在一車上，魚缸內裝水。請問當車子以等速率繞一圓周前進時，魚缸內的水面應該接近於下列何者？（箭頭表車子前進的方向，而圓心在左邊）



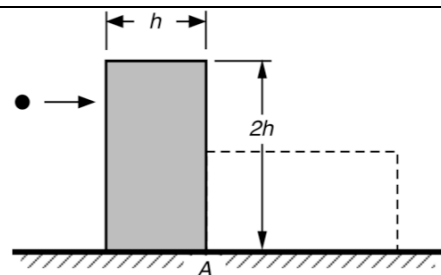
參考解答：(C)

每一質量為 m 的水元素除了承受垂直方向的重力 mg 外，水平方向的“慣性力” $mR\omega^2$ 亦可視為疊加在此水元素中，其結果為“視重力場”（apparent gravitational field）由圓心的垂直方向往外漸變化為較水平，如右圖所示。



3. (4%) 一子彈以速度5m/s，射入一高 $2h$ 、寬 h 的木塊，木塊質量是子彈的99倍，子彈最後停留在木塊中，並將木塊擊倒（如右圖所示），子彈穿入木塊時間共0.01秒。請問子彈的入射位置至少約距地面多高？

- (A) $2h$ (B) $1.5h$ (C) h (D) $0.5h$ (E) $0.45h$



參考解答：(C)

假設子彈質量為 m 。由動量—衝量原理

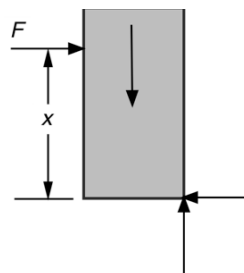
$$F\Delta t = m\Delta v$$

$$F = \frac{m \times 5}{0.01} = 500m$$

為使木塊翻倒，對支點的總力矩至少必須大於零

$$500m \cdot x - 100m \cdot 10 \cdot 0.5h > 0$$

$$x > h$$



4. (4%) 有一質量為4kg的物體放置在水平地面上，物體在水平拉力 F 作用下由靜止開始運動。10秒後拉力大小

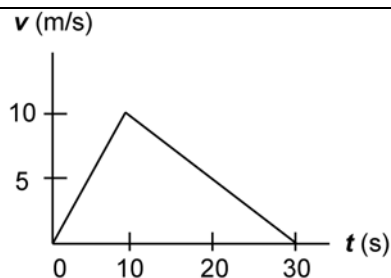
減為 $\frac{1}{3}F$ ，該物體的 $v-t$ 圖如右圖所示，請問物體所受的

水平拉力的大小 F 及物體與地面間的動摩擦係數 μ 為分別為何？（ $g = 10 \text{ m/s}^2$ ）

(A) $F = 9 \text{ N}$, $\mu_k = 0.125$ (B) $F = 8 \text{ N}$, $\mu_k = 0.100$

(C) $F = 7 \text{ N}$, $\mu_k = 0.150$ (D) $F = 6 \text{ N}$, $\mu_k = 0.125$

(E) $F = 5 \text{ N}$, $\mu_k = 0.100$



參考解答：(A)

由 $v-t$ 圖可以判讀出10秒前加速度為 1 m/s^2 ，10秒後加速度為 -0.5 m/s^2 ，其淨力分別為4N及-2N，依此可以列出方程式如下

$$F - f = 4$$

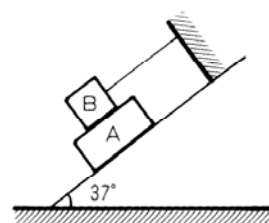
$$\frac{1}{3}F - f = -2$$

其中 f 為摩擦力，以上方程式可以解出 $F = 9 \text{ N}$, $f = 5 \text{ N}$ ，摩擦係數為

$$\mu = \frac{f}{mg} = \frac{5}{4 \cdot 10} = 0.125$$

5. (4%) 在 37° 的固定斜面上，物體B以輕繩繫住，如右圖所示，各接觸面間之靜摩擦係數皆為0.5，物體A之重量為 W ，若恰可成平衡時，則B之重量為何？

(A) W (B) $\frac{W}{2}$ (C) $\frac{W}{3}$ (D) $\frac{W}{4}$ (E) $\frac{W}{5}$



參考解答：(D)

取A、B為自由體，靜力平衡方程式為

$$(W + W_B) \frac{3}{5} = 0.5N_A + T \quad (1)$$

$$(W + W_B) \frac{4}{5} = N_A \quad (2)$$

取B為自由體，靜力平衡方程式為

$$0.5N_{AB} + W_B \cdot \frac{3}{5} = T \quad (3)$$

$$W_B \cdot \frac{4}{5} = N_{AB} \quad (4)$$

由(1)與(2)消去 N_A ，

$$W + W_B = 5T \quad (5)$$

由(3)與(4)消去 N_{AB} ,

$$W_B = T \quad (6)$$

由(5)與(6)解出 W_B

$$W_B = \frac{W}{4}$$

6. (5%) 以等厚度的薄壓克力板做成一圓柱狀的水杯（上面開口，下面封閉），半徑為 R ，高為 $2R$ ，質量為 m ，今緩慢的倒入水至全滿，水杯的總質量變為 $5m$ ，請問水杯與水的共同質心最接近杯底時水位高度約為多少？

- (A) $\frac{3}{2}R$ (B) $\frac{5}{4}R$ (C) R (D) $\frac{4}{5}R$ (E) $\frac{1}{2}R$

參考解答：(E)

空杯的質心高度 = $\frac{2\pi R(2R) \times R}{2\pi R(2R) + \pi R^2} = \frac{4}{5}R$ ，倒入水的過程中，質心先降後升，若能注意到此現象則不難判斷(E)是唯一可能的答案。若欲詳解，可以計算如下。

倒入水高度 x 後，質心高度 y 為

$$y = \frac{m \cdot \frac{4}{5}R + (4m \cdot \frac{x}{2R}) \cdot \frac{x}{2}}{m + 4m \cdot \frac{x}{2R}} = \frac{4R^2 + 5x^2}{5(R + 2x)}$$

為計算 y 的最小值，可以令其對 x 的微分值為零

$$y' = \frac{10x \cdot 5(R + 2x) - 10(4R^2 + 5x^2)}{25(R + 2x)^2} = 0$$

$$5x^2 + 5Rx - 4R^2 = 0$$

$$x = \frac{-5R + \sqrt{25R^2 + 80R^2}}{10} = \frac{-5 + \sqrt{105}}{10} R \approx 0.5R$$

7. (5%) 有一輛車以加速度 $\sqrt{3}g$ 前進，車上之人以 v 的速度向上拋一球，若不計空氣阻力，請問小球在空中時，相對於車上之人的最低速率為何？

- (A) 0 (B) $\frac{v}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}v$ (D) v (E) $2v$

參考解答：(C)

設拋球時車速為 v_0 ， t 時間後車速與球速分別為

$$\vec{v}_{car} = (v_0 + \sqrt{3}gt)\vec{i}$$

$$\vec{v}_{ball} = v_0\vec{i} + (v - gt)\vec{j}$$

相對速度為

$$\vec{v}_{b/c} = (\sqrt{3}gt)\vec{i} + (v - gt)\vec{j}$$

相對速率為

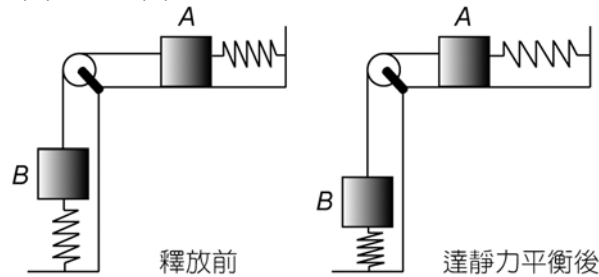
$$v_{b/c} = \sqrt{(\sqrt{3}gt)^2 + (v - gt)^2} = \sqrt{4(gt - \frac{v}{4})^2 + \frac{3v^2}{4}}$$

其極值為

$$v_{b/c} = \frac{\sqrt{3}}{2} v$$

8. (5%) A 與 B 兩木塊，以滑輪及兩相同彈簧架設成實驗裝置如下左圖所示，兩木塊的質量 $m_B = 3m_A$ ，兩彈簧的原長皆為 L ，彈力常數皆為 k ，接觸面為光滑面，彈簧與細繩重量可忽略，細繩的伸縮量亦可以忽略。實驗裝置架設好後釋放木塊，使其達靜力平衡，如下右圖所示。若此時將細繩剪斷，兩木塊將做週期性振盪，則兩木塊之振幅比為何？

(A) 1:1 (B) 1:3 (C) 3:1 (D) $1:\sqrt{3}$ (E) $\sqrt{3}:1$

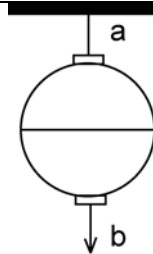


參考解答：(A)

釋放後達靜力平衡時彈簧 A 的伸長量等於彈簧 B 的壓縮量。因為 B 的重量由彈簧 A 及彈簧 B 共同承受，故此變位量大小為 $\Delta x = \frac{m_B g}{2k}$ 。我們以原長位置為基準來討論，此時 A 的位置在原長位置左邊 Δx 之處，而 B 的位置在原長位置下面 Δx 之處。細繩剪斷後 A 會往右運動而平衡點即原長位置，故振幅為 Δx ； B 則會往下運動而平衡點即原長位置下面 $2\Delta x$ （因為此時靜重量全部由 B 承受），故振幅亦為 Δx 。

9. (5%) 已知一個半球形吸盤的質量為 m ，重力加速度為 g ；現將兩個吸盤（質量共 $2m$ ）盤內抽成真空並相吸住，並以細繩懸掛於牆上，如右圖所示。假設吸盤的半徑為 r ，大氣壓力為 p 。若手抓 b 繩向下拉，欲使兩吸盤分開而繩不斷裂，則 a 繩所能承受的張力至少為何？

- (A) $2\pi r^2 p - mg$
 (B) $2\pi r^2 p + mg$
 (C) $\pi r^2 p - 2mg$
 (D) $\pi r^2 p + 2mg$
 (E) $\pi r^2 p + mg$



參考解答：(E)

取上半球為自由體，靜力平衡方程式為

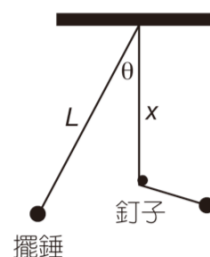
$$T = pA + mg$$

其中 T 為 a 繩張力（向上）， A 為球形斷面積， pA 為大氣壓力作用於半球面上的合力（向下）， mg 為半球的重量（注意，拉開瞬間兩半球界面並無任何力量）。以 $A = \pi r^2$ 代入，可得

$$T = \pi r^2 p + mg$$

10. (5%) 有一單擺擺長為 L ，擺錘質量為 m ，剛開始時擺線與鉛直線的夾角為 θ ，在鉛直線上距懸掛點 x 處有一小釘，擺錘可繞此小釘運動，如右圖所示。若要使擺錘可以繞釘子為中心做圓周運動，則 x 至少有多少？

- (A) $\frac{L}{5}(1+2\cos\theta)$ (B) $\frac{L}{5}(2+2\cos\theta)$
 (C) $\frac{L}{5}(3+2\cos\theta)$ (D) $\frac{L}{5}(4+2\cos\theta)$
 (E) $\frac{L}{5}(5+2\cos\theta)$



參考解答：(C)

請參考右圖，欲使擺錘繞小釘運動，A點速率至少需要 $\sqrt{g(L-x)}$ ，因為此時張力為零而重力恰等於向心力

$$mg = m \frac{v_A^2}{L-x}$$

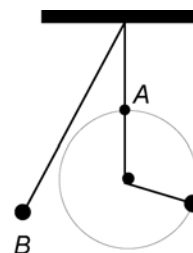
$$v_A = \sqrt{g(L-x)}$$

應用機械能守恆原理於A點及B點

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mg \cdot 2(L-x) = mgL(1-\cos\theta)$$

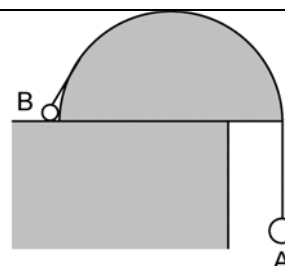
將 v_A 代入後可以解出

$$x = \frac{L}{5}(3+2\cos\theta)$$



11. (5%) 右圖的桌面上有一個半圓形橫截面的光滑柱面，其半徑為 R 。現以一條細線（假設不會伸長變形）兩端分別繫著A、B兩小球，其質量分別為 $2m$ 及 m 。若B物體自圖中所示位置開始由靜止開始被A物體牽引而運動，當B物體到達半圓形頂端時，細繩張力對B物體所做的功為何？

- (A) $\frac{\pi}{2}mgR$ (B) $\frac{\pi+1}{2}mgR$
 (C) $\frac{\pi}{3}mgR$ (D) $\frac{\pi+2}{3}mgR$
 (E) πmgR



參考解答：(D)

首先求出運動速率 v 。取兩質點為一系統，應用機械能守恆原理於運動前後兩位置

$$0 = \frac{1}{2}(m+2m)v^2 - 2mg\frac{\pi R}{2} + mgR$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}gR(\pi-1)}$$

為了計算張力對B所做的功，單獨考慮B質點，由功能原理

$$W = mgR + \frac{1}{2}mv^2$$

將 v 代入後可得

$$W = \frac{\pi+2}{3}mgR$$

12. (5%) 物體以初速 v_0 沿斜角為 θ 之粗糙斜面底部上滑，若已知上行與下行時間之比為 1:2，則滑回底部時末速為若干？（假設上行與下行的動摩擦係數為定值）

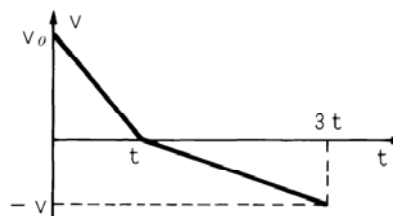
- (A) $\frac{1}{2}v_0$ (B) $\frac{2}{3}v_0$ (C) $\frac{1}{3}v_0$ (D) $\frac{3}{4}v_0$ (E) $\frac{1}{4}v_0$

參考解答：(A)

右圖為依題意所畫的 $v-t$ 圖，圖上兩個三角形面積分別為上行與下行的位移，二者應相等，亦即

$$\frac{1}{2}v_0 t = \frac{1}{2}v \cdot 2t$$

$$v = \frac{1}{2}v_0$$



13. (5%) 呈上題，物體與斜面間的動摩擦係數為若干？

- (A) $\frac{1}{5}\tan\theta$ (B) $\frac{2}{5}\tan\theta$ (C) $\frac{3}{5}\tan\theta$ (D) $\frac{4}{5}\tan\theta$ (E) $\tan\theta$

參考解答：(C)

上行加速度為 $-g(\sin\theta + \mu_k \cos\theta)$ ，下行加速度為 $g(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)$ ，則

$$\text{上行：} 0 = v_0 - g(\sin\theta + \mu_k \cos\theta) \cdot t$$

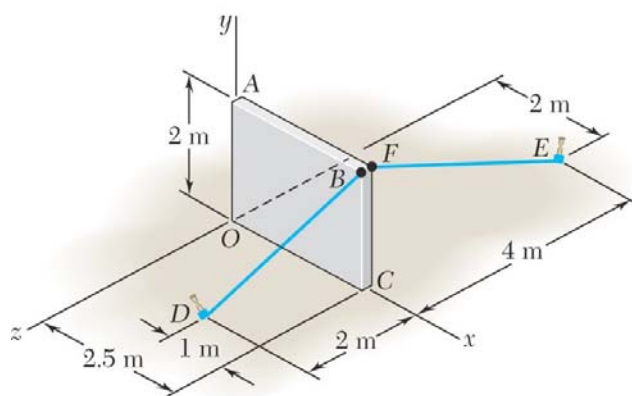
$$\text{下行：} \frac{v_0}{2} = 0 + g(\sin\theta - \mu_k \cos\theta) \cdot 2t$$

消去 v_0 後可解出 μ_k

$$\mu_k = \frac{3}{5}\tan\theta$$

14. (5%) 有一混凝土版由兩條鋼繩（ BD 及 FE ）作為臨時固定的設施，如圖所示。已知鋼繩 BD 的張力為 900 N，請問此張力對 O 點的力矩大小為多少 N·m？

- (A) 1500 (B) $1500\sqrt{2}$ (C) 2000 (D) $2000\sqrt{2}$ (E) $2000\sqrt{3}$



參考解答：(B)

力矩的定義為

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{T}$$

其中位置向量 \vec{r} 為

$$\vec{r} = 2.5\vec{i} + 2\vec{j}$$

張力 \vec{T} 方向的單位向量為 $-\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$ ，故

$$\vec{T} = 900\left(-\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}\right)$$

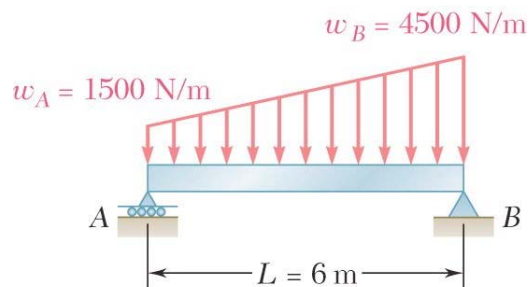
力矩計算如下

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r} \times \vec{T} \\ &= (2.5\vec{i} + 2\vec{j}) \times 900\left(-\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}\right) \\ &= 900 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2.5 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \\ &= 900\left(\frac{4}{3}\vec{i} - \frac{5}{3}\vec{j} - \vec{k}\right) \\ &= 300(4\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k})\end{aligned}$$

其大小為

$$M = 1500\sqrt{2}$$

15. (5%) 樑AB承受了梯形的分佈載重，如下圖所示，請問支點A的反力大小？
(A) 6000 N (B) 6500 N (C) 7000 N (D) 7500 N (E) 8000 N

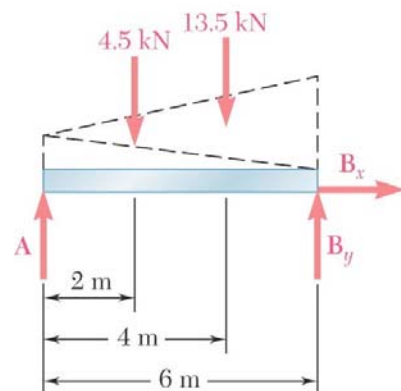


參考解答：(D)

分佈載重可以視為作用於重心的集中力。若不熟悉梯形形心位置，可以將梯形切為兩個三角形（三角形形心位置距底邊三分之一的高度），如右圖所示。欲求A點反力，可以對B點取力矩平衡條件

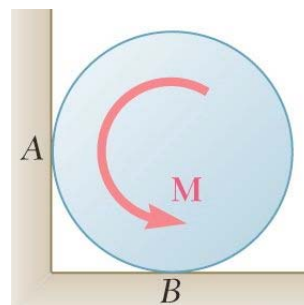
$$\sum M_B = 4.5 \times 4 + 13.5 \times 2 - R_A \times 6 = 0$$

$$R_A = 7.5 \text{ kN}$$



16. (6%) 有一圓柱體如右圖所示，重量為 W ，半徑為 r 。圓柱體與垂直牆 A 及圓柱體與水平面 B 之間的靜摩擦係數都是 μ ，請問至少需要多大的力矩 M 才能使圓柱體開始轉動？

- (A) $Wr \frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu^2}$ (B) $Wr \frac{\mu(1+2\mu)}{1+\mu^2}$
 (C) $Wr \frac{\mu(1+\mu)}{1+2\mu^2}$ (D) $Wr \frac{\mu(1+2\mu)}{1+2\mu^2}$
 (E) $Wr \frac{\mu(1+3\mu)}{1+2\mu^2}$



參考解答：(A)

請參考下圖自由體

$$\sum F_x = 0: N_A - F_B = 0, \text{ or } N_A - \mu N_B = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0: N_B + F_A - W = 0, \text{ or } N_B + \mu N_A - W = 0 \quad (2)$$

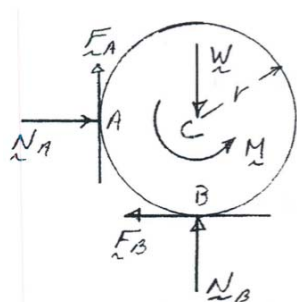
$$\sum M_C = 0: M - F_A r - F_B r = 0, \text{ or } M - \mu r(N_A + N_B) = 0 \quad (3)$$

由(1)及(2)可解出

$$N_B = \frac{W}{1+\mu^2}, \quad N_A = \frac{\mu W}{1+\mu^2}$$

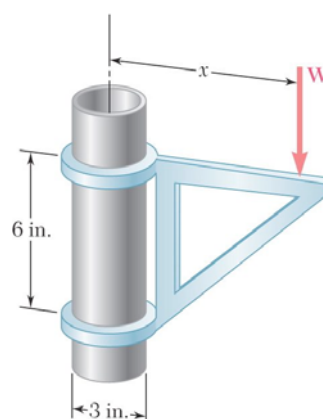
代入(3)

$$M = \mu r(N_A + N_B) = Wr \frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu^2}$$



17. (6%) 有一高6 in的三角形支架可以套在一直徑3 in的圓形鋼管上，如圖所示。支架與鋼管之間的靜摩擦係數是0.25。當載重 W 距離圓管中心 x 太小時，摩擦無法支撐載重而使得支架可以沿著圓管滑動，而當 x 大到某一程度時，支架會開始和圓管卡住，而發揮了支架的功能。請問此最小 x 值是多少？

(A) 8 in (B) 9 in (C) 10 in (D) 11 in (E) 12 in



參考解答：(E)

支架開始和圓管卡住時，受力情形如右圖所示

$$\sum F_x = 0: N_B - N_A = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0: F_A + F_B - W = 0, \text{ or } 0.25N_A + 0.25N_B - W = 0 \quad (2)$$

由(1)及(2)可解出

$$N_A = 2W$$

此外

$$\sum M_B = 0:$$

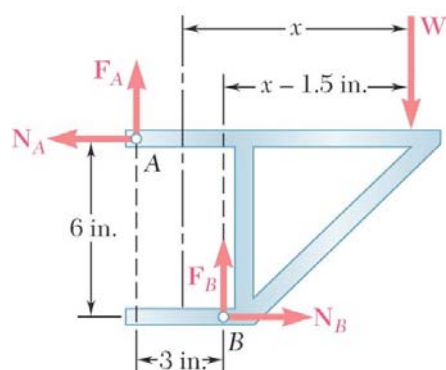
$$N_A \cdot 6 - F_A \cdot 3 - W(x - 1.5) = 0$$

$$N_A \cdot 6 - 0.25N_A \cdot 3 - W(x - 1.5) = 0$$

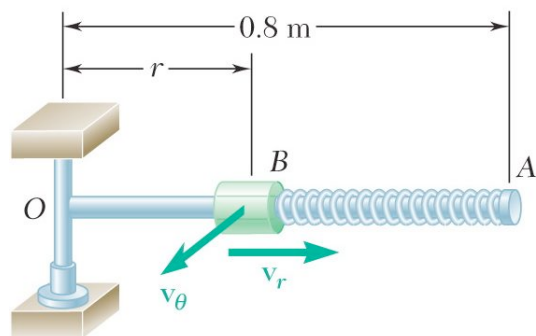
$$2W \cdot 6 - 0.25 \cdot 2W \cdot 3 - W(x - 1.5) = 0$$

可解出

$$x = 12 \text{ in}$$



18. (6%) 將質量4 kg的套管與一彈簧相聯接並安裝於下圖所示的裝置上。套管B可以沿著桿件AO滑動。彈簧未伸縮時的長度是0.4 m，彈簧係數是1500 N/m。套管B一開始被用一螺栓固定在 $r = 0.2 \text{ m}$ 處，並且整個系統在水平面上作等角速率旋轉，套管的速率是 $v_\theta = 6 \text{ m/s}$ （但是此時 $v_r = 0$ ）。假設因為“離心力”超過負荷，螺栓忽然斷裂，使得套管B開始往外移動；請問套管B移動到 $r = 0.5 \text{ m}$ 時， v_θ 為多少？假設桿件AO的質量可以忽略，所有摩擦力亦可忽略。
(A) 1.2 m/s (B) 2.4 m/s (C) 3.6 m/s (D) 6 m/s (E) 15 m/s



參考解答：(B)

套管B的淨力方向一直維持在向心的方向，故套管的角動量會守恆

$$\vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 = \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2$$

其中時間1為螺栓剛斷裂時（ $r = 0.2 \text{ m}$ ），而時間2為 $r = 0.5 \text{ m}$ 時，上式可以寫成

$$r_1 v_{\theta,1} = r_2 v_{\theta,2}$$

或是

$$0.2 \cdot 6 = 0.5 \cdot v_{\theta,2}$$

$$v_{\theta,2} = 2.4 \text{ m/s}$$

19. (6%) 呈上題，請問在 $r = 0.5 \text{ m}$ 時， v_r 約為多少？

(A) 2.4 m/s (B) 3.4 m/s (C) 4.4 m/s (D) 5.4 m/s (E) 6.4 m/s

參考解答：(E)

整個系統的總機械能在時間1與時間2時必須守恆

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\frac{1}{2}mv_{\theta,1}^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_{\theta,2}^2 + \frac{1}{2}mv_{r,2}^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$$

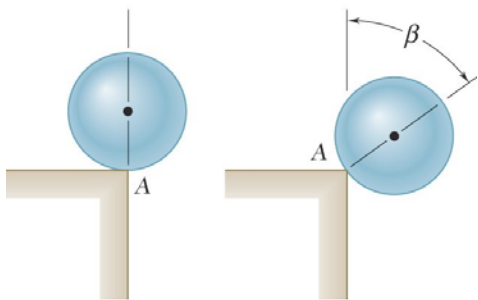
$$\frac{1}{2}4 \cdot 6^2 + \frac{1}{2}1500 \cdot (0.2)^2 = \frac{1}{2}4 \cdot (2.4)^2 + \frac{1}{2}4 \cdot v_{r,2}^2 + \frac{1}{2}1500 \cdot (0.1)^2$$

$$v_{r,2}^2 = 41.49$$

$$v_{r,2} \approx 6.44 \text{ m/s}$$

20. (6%) 一個質量為 m 半徑為 r 的球體（轉動慣量為 $\frac{2mr^2}{5}$ ）置放於非常尖銳的桌角A上，此球體被輕輕一推後會先沿著A點轉動，一直到轉動的角度等於 β 時，球體會脫離桌角A而落下。請問 β 為多少？

(A) $\cos^{-1} \frac{5}{7}$ (B) $\cos^{-1} \frac{1}{2}$ (C) $\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\cos^{-1} \frac{15}{29}$ (E) $\cos^{-1} \frac{10}{17}$



參考解答：(E)

球體恰脫離A時，桌角作用於球體的正向力（此方向為球心與桌角連線）恰為零，此時球體重力在此正向的分力恰提供了旋轉的向心力，亦即

$$mg \cos \beta = m \frac{\bar{v}^2}{r}$$

$$\cos \beta = \frac{\bar{v}^2}{gr} \quad (1)$$

其中 \bar{v} 為球心的速率，此速率可由機械能守恆原理計算。令時間1表示轉角為零時而時間2表示轉角為 β 時

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + mgr = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgr \cos \beta$$

其中 ω 為球體在時間2時的角速率而 I 為球體的轉動慣量，以 $\omega = \frac{\bar{v}}{r}$ 及 $I = \frac{2mr^2}{5}$ 代入上式

$$0 + mgr = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2mr^2}{5}\right)\left(\frac{\bar{v}}{r}\right)^2 + mgr \cos \beta$$

$$\frac{\bar{v}^2}{r} = \frac{10}{7}g(1 - \cos \beta)$$

將此式代入(1)式，得到

$$\cos \beta = \frac{10}{7}(1 - \cos \beta)$$

$$\cos \beta = \frac{10}{17}$$