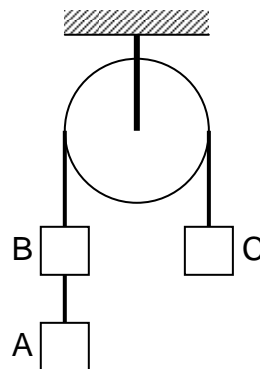


# 2008 中國物理學奧林匹克競賽

本試卷為物理學知識測驗題，佔總分 70%，測驗時間為 10:50-12:20。以下 14 題全部為填充題，每題 5 分，答錯不倒扣；若為數值計算問題，您的答案必需與本會所提供的「標準答案」，誤差在 5% 以內才給分。請將答案填寫在現場提供的答案卷內（請填寫准考证號及姓名）。

## 1. 計算繩子張力。

一剛性細繩跨於無摩擦之定滑輪上，細繩上繫以 A、B、C 三物體，如右圖所示。若 A、B、C 三物體的質量均為  $m$ ，重力加速變為  $g$ ，則釋放後連結 A、B 細繩上之張力為多少？



答：\_\_\_\_\_（表示成  $m$  與  $g$  的形式）。

參考解答： $2mg/3$ 。

釋放後 A、B、C 將有相同之加速變。A 與 B 總重為  $2mg$ ，而 C 為  $mg$ ，則

$$(2mg - mg) = 3ma \quad \therefore a = g/3$$

取 A 為自由體

$$mg - T = ma = m \times g/3 \quad \therefore T = 2mg/3$$

## 2. 判斷摩擦力的方向。

想像某人推自行車前進時，地面對前輪的摩擦力是  $F_1$ ，地面對後輪的摩擦力是  $F_2$ ；當此人騎自行車並踩著腳踏板，鍊條帶動後輪並前進時，地面對前輪的摩擦力是  $F_3$ ，地面對後輪的摩擦力是  $F_4$ 。請問此四個摩擦力的方向分別為何？

答：

- (a)  $F_1$  方向與自行車前進方向 \_\_\_\_\_（填 V 相同或是相反）。
- (b)  $F_2$  方向與自行車前進方向 \_\_\_\_\_（填 V 相同或是相反）。
- (c)  $F_3$  方向與自行車前進方向 \_\_\_\_\_（填 V 相同或是相反）。
- (d)  $F_4$  方向與自行車前進方向 \_\_\_\_\_（填 V 相同或是相反）。

參考解答：

- (a)  $F_1$  方向與自行車前進方向相反。
- (b)  $F_2$  方向與自行車前進方向相反。
- (c)  $F_3$  方向與自行車前進方向相反。
- (d)  $F_4$  方向與自行車前進方向相同。

推車時，自行車的前後輪觸地點相對地面均有向前運動的趨勢，故所受摩擦力的方向與車的前進方向相反。騎自行車時，踩著腳踏板前進使後輪有向後轉動的趨勢，後輪受到的摩擦力向前，當後輪向前時，推動前輪有向前運動的趨勢，前輪受到的摩擦力向後。

另一種解釋方法是：若輪子與地面完全沒有摩擦力，則推車時，整個車子會前進但

是兩個輪子都不會轉動——向後的摩擦力使得兩個輪子滾動。另一方面，若輪子與地面完全沒有摩擦力，則騎車時，後輪會空轉，但是整個車子不會前進，前輪也不會轉動——向前的摩擦力使後輪的空轉變為滾動，而向後的摩擦力使得前輪能滾動。

### 3. 計算地球同步衛星軌道高度。

想像一個繞地球圓形軌道運行的人造衛星，若該人造衛星為所謂的地球同步衛星（geosynchronous satellite），亦即該衛星繞地球運轉時與地球具有相同的角速度並保持於地面一定點正上空。已知地球的半徑約為 6370 km，請問同步衛星軌道離地球表面約為多少公里？

答：\_\_\_\_\_ km。

參考解答：36,000 km。

令地球半徑為  $r$ ，同步衛星軌道距地球中心為  $R$ ， $g$  為地球表面的重力加速度的，則在軌道

上的重力加速度的  $a = \frac{r^2}{R^2} g$ 。此重力加速度的提供了衛星做等速圓周運動的向心加速度的，

亦即  $a = \frac{v^2}{R}$ ，其中  $v$  為同步衛星的速率， $v = \frac{2\pi R}{86400}$ 。依此可以解出

$$R = \sqrt[3]{gr^2 \left( \frac{86400}{2\pi} \right)^2} = \sqrt[3]{9.81 \times 6,370,000^2 \times \left( \frac{86400}{2\pi} \right)^2} = 42,200,000 \text{ m}$$

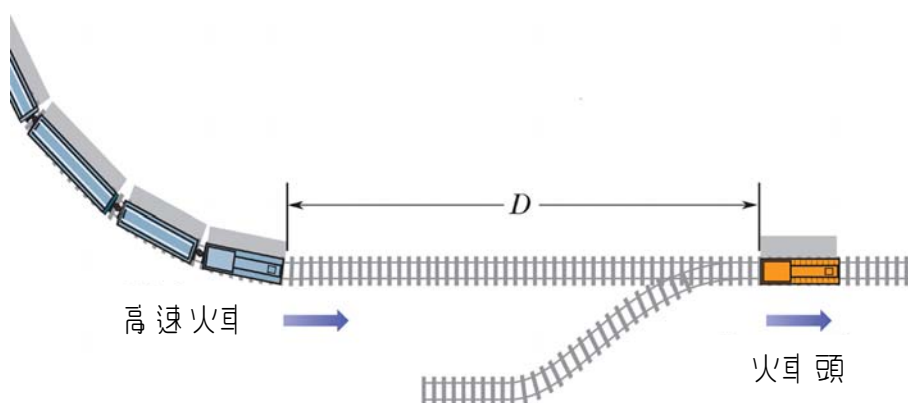
同步衛星軌道距地球表面為

$$42,200 - 6370 = 35,800 \text{ km}$$

### 4. 估算所須要減速度的大小。

下圖表示一高速火車（左邊）以 180 km/h 速度轉彎進入直線軌道時，駕駛員赫然發現有另一火車頭（右邊）以 36 km/h 速度誤駛同一軌道；此時兩車距離是  $D = 200 \text{ m}$ ，如圖所示。高速火車的駕駛員立刻啟動煞車系統。如果煞車過程是等減速運動，請問此減速度至少要多大才能避免兩車相撞的慘劇發生？

答：\_\_\_\_\_  $\text{m/s}^2$



參考解答：4.0 m/s<sup>2</sup>。

令煞車過程中，高速火車的初速度是  $v_i$  (180 km/h = 50 m/s)，末速度是  $v_f$  (36 km/h = 10 km/h)， $t$  表示煞車過程的時間，並且以  $\Delta x$  表示煞車過程的距離 ( $\Delta x = D + v_f t$ )，則高速火車的平穩度是

$$\frac{v_i + v_f}{2} = \frac{\Delta x}{t} = \frac{D + v_f t}{t} = \frac{D}{t} + v_f$$

設減速度為  $a$ ，則  $t = (v_i - v_f)/a$ ，代入上式，得

$$\frac{v_i + v_f}{2} = \frac{D}{(v_i - v_f)/a} + v_f$$

整理後得到

$$a = \left( \frac{v_i + v_f}{2} - v_f \right) \frac{(v_i - v_f)}{D} = \frac{(v_i - v_f)^2}{2D} = \frac{(50 - 10)^2}{2 \times 200} = 4.0 \text{ m/s}^2$$

5. 估計樓層層數。

想像有一實心橡膠球由樓頂的樓頂掉落至地面再反彈至高空，而你在某一層樓往窗外觀測，並量測時間，以估計樓層的層數。橡膠球通過你的窗口（由窗頂至窗底共 1.0 m）的時間總共是 0.10 s。橡膠球通過窗底後，再經過 2.0 s 後彈回窗底，並且又以 0.10 s 的時間通過整個窗口（由窗底至窗頂）。若每層以 3 m 估計，則此樓房約幾層？（註：你可以假設實心橡膠球與地面為完全彈性碰撞。）

答：\_\_\_\_\_ 層。

參考解答：7 層。

依題意，我們可以將橡膠球與地面的碰撞視為彈性碰撞。此外，我們先假設運動過程為等加速運動，最後再判斷是否合理。設窗頂與窗底的位置分別是  $y_1$  及  $y_2$ （以地面為原點）；並設橡膠球掉落而通過窗頂時的速度是  $v_1$ ，時間是  $t_1$ ，而通過窗底時的速度是  $v_2$ ，時間是  $t_2$ 。依題意

$$y_1 - y_2 = v_1(t_2 - t_1) + 0.5g(t_2 - t_1)^2$$

$$v_1 = \frac{(y_1 - y_2) - 0.5g(t_2 - t_1)^2}{(t_2 - t_1)} = \frac{1.0 - 0.5 \times 10(0.10)^2}{0.10} = 9.5 \text{ m/s}$$

設樓高為  $H$ ，則窗頂至樓頂的距離為  $H - y_1$ ，此值可以由下式估計

$$\begin{aligned} v_1^2 &= 2g(H - y_1) \\ H - y_1 &= \frac{v_1^2}{2g} = \frac{9.5^2}{2 \times 10} = 4.5 \text{ m} \end{aligned}$$

設橡膠球碰地時間是  $t_3$ ，則  $t_3 - t_2 = 2.0/2 = 1.0 \text{ s}$ 。所以  $t_3 - t_1 = 1.0 + 0.1 = 1.1 \text{ s}$ ，再次應用自由落體公式

$$y_1 = v_1(t_3 - t_1) + 0.5g(t_3 - t_1)^2$$

$$y_1 = 9.5 \times 1.1 + 0.5 \times 10 \times 1.1^2 = 16.5 \text{ m}$$

所以  $H = 4.5 + 16.5 = 21 \text{ m}$ ，約是 7 層樓。在此高度並非很大的情況下，等加速運動的假設是合理的，亦即空氣阻力是可忽略的。

6. 估計繩子的抗張強度。

某人將  $1 \text{ kg}$  質量的石頭綁在一細繩尾端，手持另一端並用力在小圓面上騰空旋轉。小圓面與地面的垂直高度是  $2.0 \text{ m}$ ，小圓旋轉半徑為  $1.5 \text{ m}$ 。當旋轉速度增加到某一程度時，繩子忽然斷裂，石頭以小圓方向飛出，最後掉落地面。經量測結果，石頭觸地的地點與此人所站位置的小圓距離是  $11.5 \text{ m}$ 。依以上數據，請估計繩子的抗張強度，亦即斷裂時的張力大小。

答：\_\_\_\_\_ N。

參考解答：167 N。

設石頭以小圓方向飛出時，初速度為  $v_0$ ，總共飛行時間為  $t$ ，則總共的小圓與垂直飛行距離分別是

$$x = v_0 t$$

$$y = 0.5gt^2$$

依題意， $x = 11.5 - 1.5 = 10.0 \text{ m}$ ， $y = 2.0 \text{ m}$ 。上式可以解出

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$v_0 = \frac{x}{t} = x / \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

繩子斷裂時的張力  $T$  相當於斷裂時的向心力，亦即

$$T = \frac{mv_0^2}{r} = \frac{m \left( x^2 / \frac{2y}{g} \right)}{r} = \frac{mgx^2}{2ry}$$

$$T = \frac{1.0 \times 10 \times 10^2}{2 \times 1.5 \times 2.0} = 167 \text{ N}$$

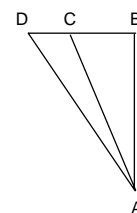
7. 估算渡河時間。

有一寬度為  $200 \text{ m}$  的河流，水流以  $1.0 \text{ m/s}$  等速由西往東流動。某人在南岸想要乘船小船到北岸。北岸唯一能停靠小船的地點在此人位置正對岸再往西  $80 \text{ m}$  處。小船相對於水流的速率最多是  $4.0 \text{ m/s}$ 。此人想要以直線渡河到能停靠小船的地點，請問最少須要多少時間？

答：\_\_\_\_\_ s。

參考解答：61.2 s。

右圖中，A 是此人出發前的位置，B 是 A 的正對岸，C 是目的地，而 AD 是小船的船頭對準的方向。設渡河時間為  $t$ ，則依題意  $AB = 200 \text{ m}$ ， $BC = 80 \text{ m}$ ， $CD = 1.0t$ ， $AD = 4.0t$ 。由直角三角形關係，可以解出時間  $t$ ：



$$\begin{aligned}(4.0t)^2 &= 200^2 + (80 + 1.0t)^2 \\ 15t^2 - 160t - 46400 &= 0 \\ t &= \frac{80 + 40\sqrt{439}}{15} = 61.2 \text{ s}\end{aligned}$$

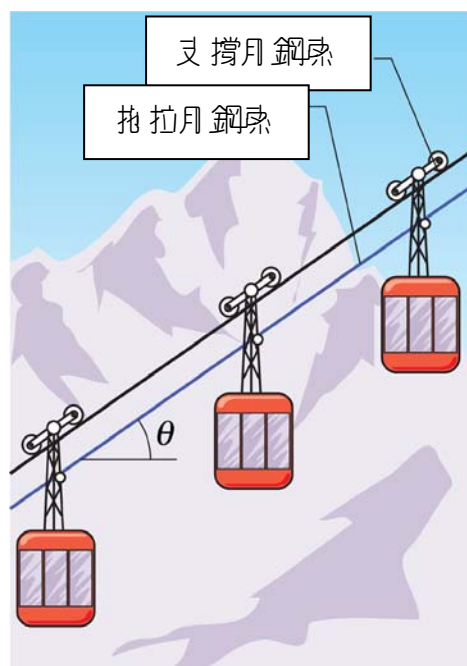
注意， $\triangle ACD$  中，DC 為水流相對於地面的速度 ( $\vec{v}_{wg}$ ) 的方向，AC 為小船相對於地面的速度 ( $\vec{v}_{bg}$ ) 的方向，AD 為小船相對於水流的速度 ( $\vec{v}_{bw}$ ) 的方向，三者間的關係是

$$\vec{v}_{bg} = \vec{v}_{bw} + \vec{v}_{wg}$$

8. 計算相鄰兩段鋼索的張力差。

右圖是一纜車系統的示意圖，其中鋼索的傾斜角  $\theta = 30^\circ$ 。每一纜車在滿載時的質量是  $2800 \text{ kg}$  (含纜車及乘客)。鋼索有兩層，上層鋼索是不動的，用來支撐纜車的重量；下層鋼索是與纜車連結，可以拉動纜車，控制纜車的移動。在滿載時，當纜車以  $1.0 \text{ m/s}^2$  的加速度往上移動時，纜車兩邊鋼索 (下層鋼索) 的張力差是多少？

答：\_\_\_\_\_ N。

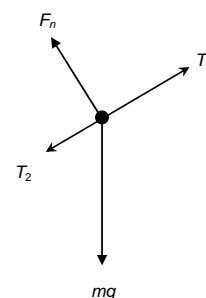


參考解答：16800 N。

右圖是以纜車為自由體的受力情形。由牛頓第二運動定律，沿著鋼索方向的運動方程式為

$$T_1 - T_2 - mg \sin \theta = ma$$

所以張力差為



$$\begin{aligned}
 T_1 - T_2 &= mg \sin \theta + ma \\
 &= 2800 \times 10 \times \sin 30^\circ + 2800 \times 1.0 \\
 &= 16800 \text{ N}
 \end{aligned}$$

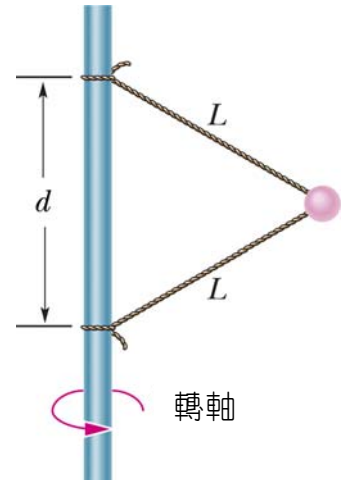
9. 計算兩細繩的張力。

右圖表示一質量為  $1.0 \text{ kg}$  的圓球與兩條細繩連接，兩細繩則綁在垂直的轉軸上。圖中  $L = d = 1.0 \text{ m}$ 。當轉軸的轉速是每秒  $1.0$  轉時，請問兩細繩的張力分別是多少？

答：

(a) 上繩 \_\_\_\_\_ N。

(b) 下繩 \_\_\_\_\_ N。



參考解答：上繩  $29.6 \text{ N}$ ，下繩  $10.0 \text{ N}$ 。

右圖是以圓球為自由體的受力情形。水平方向與垂直方向的平衡方程式分別為

$$\begin{aligned}
 T_1 \cos \theta + T_2 \cos \theta &= \frac{mv^2}{r} \\
 T_1 \sin \theta - T_2 \sin \theta - mg &= 0
 \end{aligned}$$

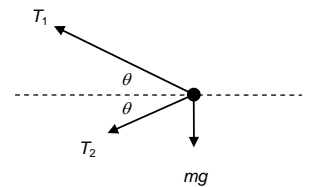
其中  $\theta = 30^\circ$ ， $m = 1 \text{ kg}$ ，旋轉半徑  $r = \sqrt{3}/2 \text{ m}$ ，旋轉速率  $v = 2\pi r \text{ m/s}$ ，代入數值後方程式變成

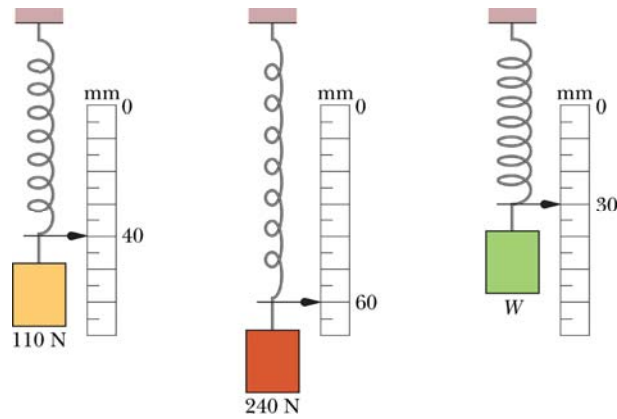
$$\begin{aligned}
 T_1 + T_2 &= \frac{mv^2}{r \cos \theta} = \frac{1 \times \left( 2\pi \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos 30^\circ} = 39.5 \\
 T_1 - T_2 &= \frac{mg}{\sin 30^\circ} = \frac{1 \times 9.8}{\sin 30^\circ} = 19.6
 \end{aligned}$$

解得  $T_1 = 29.6 \text{ N}$ ， $T_2 = 10.0 \text{ N}$ 。

10. 某一彈簧（上有指針），經懸掛三個物體後，其伸長情形如下圖表示。其中第一個物體重是  $110 \text{ N}$ ，指針在  $40 \text{ mm}$  的位置；第二個物體重是  $240 \text{ N}$ ，指針在  $60 \text{ mm}$  的位置；若第三個物體使指針在  $30 \text{ mm}$  的位置，請問第三個物體的重量是多少？假設此彈簧遵循虎克定律（Hooke's law）。

答：\_\_\_\_\_ N。





參考解答： 45 N。

由 Hooke's law，重量的差異與伸長的差異成正比，亦即

$$\begin{aligned}\Delta W &= k\Delta x \\ 240 - 110 &= k(60 - 40) \\ k &= 6.5 \text{ N/mm}\end{aligned}$$

假設在沒有懸掛任何物體下，指針在  $x_0$  的位置，則再一次利用第一個物體的情形

$$110 = k(40 - x_0)$$

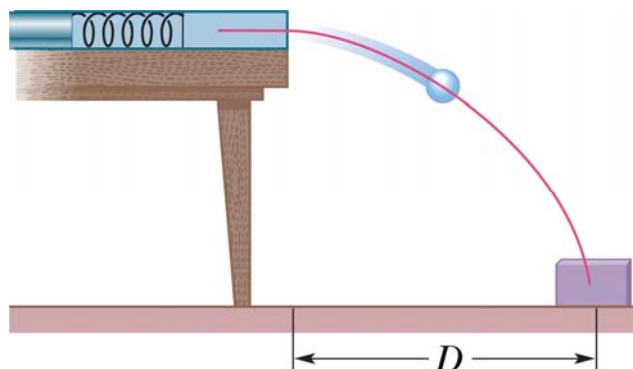
解出  $x_0 = 23 \text{ mm}$ 。第三個物體的重量則是

$$W = k(30 - x_0) = 6.5(30 - 23) = 45 \text{ N}$$

#### 11. 彈珠比賽。

兩個人在玩射彈珠比賽，規則是壓縮桌面的一個彈簧後，將彈珠以水平方向射出，若能掉落在地面上的小盒子內，則可贏得這一局比賽。第一個人將彈簧壓縮 1.10 cm 後釋放彈珠，結果彈珠落在小盒子中心前面（亦即力量不夠大）27.0 cm 處。第二個人仔細觀察此系統，他量得桌面邊緣與小盒子中心水平距離是  $D = 2.20 \text{ m}$ ；他也注意到桌面是光滑的，彈簧也是遵循虎克定律的。依以上資訊，他應該將彈簧壓縮多少才會精準地將彈珠射在小盒子中心上。

答：\_\_\_\_\_ cm。



參考解答：1.25 cm。

設  $v_0$  為彈珠離開彈簧後的初速度（也是離開桌面邊緣的初速度）， $h$  為桌面高度， $x$  為彈珠落地處與桌面邊緣的水平距離，則  $x = v_0 t$ ， $h = 0.5gt^2$ ，兩式消掉  $t$  後，我們可以得到  $x = v_0 \sqrt{2h/g}$ 。此式告訴我們  $x$  與  $v_0$  成正比。若令  $v_{o1}$  為第一個人的初速度， $v_{o2}$  為第二個人的初速度， $x_1$  為一個人的彈珠落地處與桌面邊緣的水平距離，則

$$\frac{v_{o2}}{v_{o1}} = \frac{D}{x_1}$$

當彈簧被壓縮  $d$  時，彈性能是  $0.5kd^2$ 。當彈珠離開彈簧時，此彈性能完全轉換為動能  $0.5mv_0^2$ （其它能量損失在此可以忽略）。由  $0.5kd^2 = 0.5mv_0^2$ ，此式告訴我們初速度與壓縮量成正比，亦即

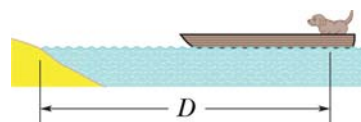
$$\frac{v_{o2}}{v_{o1}} = \frac{d_2}{d_1}$$

結論是與壓縮量與水平距離成正比

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{D}{x_1}$$

$$d_2 = \frac{D}{x_1} d_1 = \frac{220}{220 - 27} 1.10 = 1.25 \text{ cm}$$

12. 有一隻 4.5 kg 的狗站在一艘 18 kg 的平衡船的船尾。此時水流是靜止的，狗與平衡船也都是靜止的，而狗與岸邊的距離為  $D = 6.1 \text{ m}$ ，如右圖所示。這隻狗想要上岸，所以它在平衡船上向岸邊的方向走了 2.4 m，就碰到船頭無法再前進了。請你估計此時狗與岸邊的距離是多少？注意，當狗往左邊走時，這艘船會往右邊移動。估計時你可以忽略船與水之間的摩擦。



答：\_\_\_\_\_ m。

參考解答：4.2 cm。

將狗與平衡船視為一系統，則在整個過程中沒有任何外力參與，所以整體重心應維持在原來處。令  $\Delta x_d$ 、 $\Delta x_b$ 、 $\Delta x$  分別代表狗、船、及整體的重心改變量（其中  $\Delta x = 0$ ），並取向左為正，則

$$\begin{aligned} (m_d + m_b)\Delta x &= m_d\Delta x_d - m_b\Delta x_b = 0 \\ 4.5\Delta x_d - 18\Delta x_b &= 0 \end{aligned}$$

狗在平衡船上向左走了 2.4 m，亦即

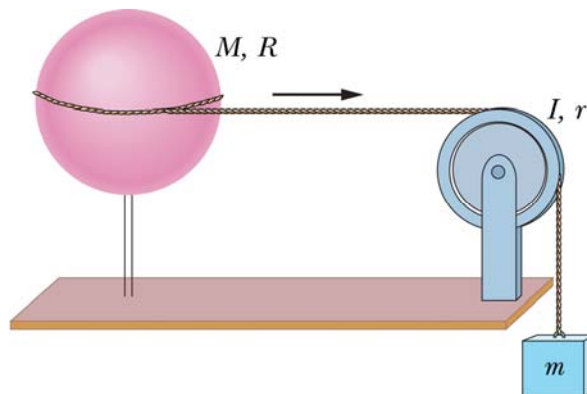


$$\Delta x_d + \Delta x_b = 2.4$$

解得  $\Delta x_d = 1.9 \text{ m}$ 。所以狗與岸邊的距離此時是

$$D - \Delta x_d = 6.1 - 1.9 = 4.2 \text{ m}$$

13. 古羅馬的薄殼(空心)圓球(質量  $M = 4.5 \text{ kg}$ ，半徑  $R = 8.5 \text{ cm}$ ，轉動慣量  $\frac{2MR^2}{3}$ )可以繞著垂直軸自由轉動。一細繩纏繞過圓球的「赤道」三圈後再繞過一滑輪(半徑  $r = 5.0 \text{ cm}$ ，轉動慣量  $I = 0.003 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ )，最後懸掛著一個質量為  $m = 0.60 \text{ kg}$  的物體。此物體經釋放後往下掉落，並帶動圓球轉動。請問物體掉落  $82 \text{ cm}$  時，該物體的速度大小多少？假設細繩的質量可以忽略，細繩與圓球沒有任何滑動現象，圓球與垂直軸之間或是滑輪的摩擦都可以忽略。



答：\_\_\_\_\_ m/s。

參考解答：1.4 m/s。

物體掉落  $h = 82 \text{ cm}$  時，共釋放出  $mgh$  的位能；此位能全部轉換成動能，亦即

$$mgh = \frac{1}{2} \left( \frac{2MR^2}{3} \right) \omega_{\text{sphere}}^2 + \frac{1}{2} I \omega_{\text{pulley}}^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

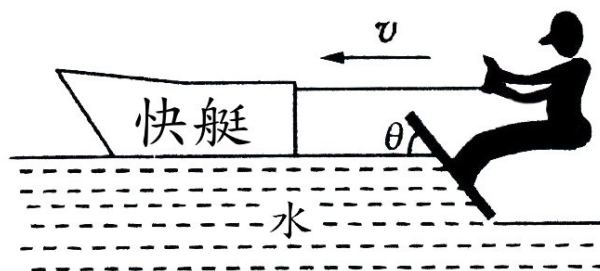
$$mgh = \frac{1}{2} \left( \frac{2MR^2}{3} \right) \left( \frac{v}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} I \left( \frac{v}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

其中  $\omega_{\text{sphere}}$  與  $\omega_{\text{pulley}}$  分別是圓球及滑輪的角速度，而  $v$  是物體的直線速度。上式可以解得

$$v = \sqrt{\frac{mgh}{\frac{M}{3} + \frac{I}{2r^2} + \frac{m}{2}}} = \sqrt{\frac{0.6 \times 10 \times 0.82}{\frac{4.5}{3} + \frac{0.003}{2 \times 0.05^2} + \frac{0.6}{2}}} = 1.4 \text{ m/s}$$

14. 在電視節目中，我們常能看到精彩的滑水表演，如下圖所示：運動員在快艇的小斗室牽引作用下，腳踏傾斜滑板在水上做等速滑行。研究顯示：當滑板與小斗室方向的夾角為  $\theta$  (滑板抬起的角度) 時，水對滑板的作力大小  $N = \rho S v^2 \sin^2 \theta$ ，方向垂直於滑板面，式中  $\rho$  為水的密度， $S$  為滑板的滑水面積， $v$  為快艇的牽引速度。假設滑板是光滑的(可忽略與水的摩擦)。請問若使滑板能在水面上以  $\theta$  的角度滑行，快艇小斗室牽引滑板的速度為多少？

答：\_\_\_\_\_ (以  $m, g, \rho, S, \theta$  表示)。



參考解答： $\sqrt{\frac{mg}{\rho S \sin^2 \theta \cos \theta}}$ 。

以滑板和運動員為對象，受力如右圖所示，由圖可知  $F$ 、 $mg$ 、與  $N$  形成平衡（其中  $F$  為牽引力），即

$$mg = N \cos \theta = \rho S v^2 \sin^2 \theta \cos \theta$$

由此可得速度為

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\rho S \sin^2 \theta \cos \theta}}$$

