

1999 年第 30 屆國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊  
複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

一、一質量為  $m$ 、半徑為  $r$  的小球，在一半徑為  $R$ ，垂直豎立的圓形軌道上運動，如圖 1 所示。

(a) 若軌道粗糙，小球在軌道上做純滾動，當小球滾動一小角度  $\Delta\theta$  時，球心與軌道圓心的連線轉動一小角度  $\Delta\phi$ ，求  $\Delta\theta$  和  $\Delta\phi$  的關係。

(b) 承(a)題，當小球在軌道最低點處附近做小幅運動(球仍做純滾動)時，其質心來回運動的週期為何？

(c) 若軌道光滑，則小球在軌道最低處附近做小幅運動時，其質心來回運動的週期為多少？

(d) 在(b)和(c)的情況中，分別令小球的半徑  $r \rightarrow 0$ ，則它們的週期為何？說明這兩個週期和以  $R$  為擺長之單擺振動週期有何異同？從小球的受力情形討論它們之間有差異的理由。

(e) 設想有一個複擺，以小球為擺錘，軌道圓心為懸點，錘心與懸點之間的連線長  $(=R-r)$  為擺長(連線質量可忽略)，其作小幅振動的週期為何？說明這個複擺週期和(c)情況中所得的週期有何差異？

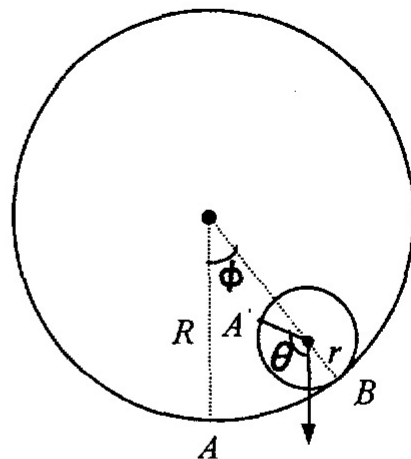


圖 1

二、一均勻細棒，質量  $m$ ，長度  $L$ ，可繞通過其中心  $O$  的水平軸在鉛垂面內自由轉動。開始時，此棒靜止於水平位置，如圖 2 所示。一質量為  $m/3$  的小蟲於棒上方  $h$  高處，從靜止下落至距棒右端  $L/4$  處，使木棒開始轉動。

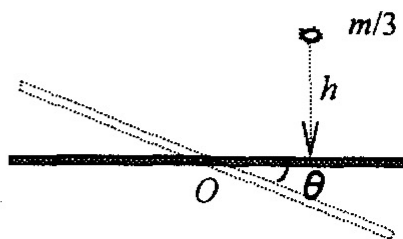


圖 2

(a) 若小蟲碰撞木棒的時間極為短暫，則木棒開始轉動的角速率為何？

當小蟲下落至棒上後，即開始爬向木棒的右端，已知小蟲在爬行過程中，木棒以等角速度轉動，試問：

(b) 小蟲爬行的速率應為若干？

- (c) 從小蟲落至棒上的時刻算起，經過時間  $t$  後 ( $t$  小於木棒轉  $1/4$  圈所需的時間)，小蟲與中心  $O$  點之間的距離為何？
- (d) 若小蟲想在木棒轉動至與水平方向夾成  $30^\circ$  角時，爬行至距木棒右端點  $L/8$  以內的距離，則它下落高度  $h$  的最大值為何？
- (e) 承(d)題，若木棒轉動至與水平方向夾成  $30^\circ$  角時，且小蟲剛好爬行至距棒右端點  $L/8$  距離處，一質量為  $2m/3$  的蜘蛛，從鉛垂方向以速度  $v$  降落至距棒中心  $3L/16$  處，棒因此停止轉動，則  $v$  的量值應為何？(同(a)小題一樣，假設蜘蛛碰撞木棒的時間極為短暫。)
- (f) 承(e)題，如果小蟲仍以原速爬向右端，若欲使棒維持不轉動，則蜘蛛應以何速爬向小蟲？

- √ 三、兩平行細棒  $A$  和  $B$  的長度各為  $L$ ，電阻各為  $R$ ，兩棒間的距離固定為  $D$ ，安置於一對平行的長金屬軌道並密接如圖 3 所示。兩軌道的區間佈置有非均勻的磁場，其量值為  $B = kx^2y$ ，方向為垂直射出紙面。軌道的最右側接有一伏特計，兩金屬軌道的電阻很小，可以忽略。今施力使  $A$  和  $B$  兩細棒均以同一固定速度  $v$  在軌道上向右滑行。已知  $L = 0.2\text{ m}$ ， $D = 0.1\text{ m}$ ， $R = 1\Omega$ ， $v = 10\text{ m/s}$ ，及  $k = 1\text{ T}$  ( $x$  和  $y$  以  $\text{m}$  為單位)。當  $A$  棒行經距原點  $0.5\text{ m}$  處之瞬時，求：
- (a) 伏特計的讀數，並畫出等效電路圖。
- (b) 外力所施之功率(忽略摩擦力之消耗)。
- (c) 各棒所受之磁力。

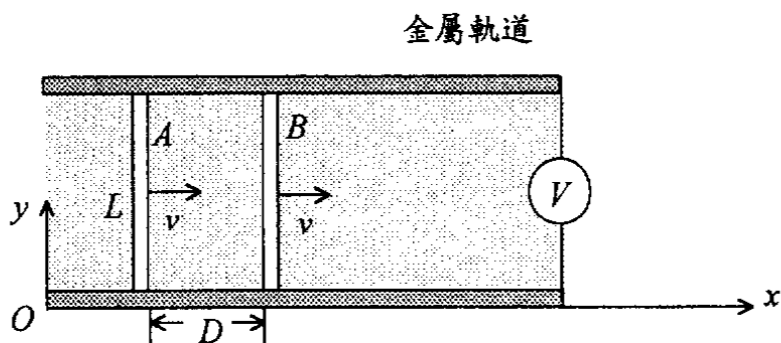


圖 3

- 四、如圖 4 所示，一磁導率為  $\mu$  的均勻圓環，其圓形橫截面之半徑  $a$ ，遠小於圓環中心線之半徑  $R$ 。此圓環有一長度為  $L$  的小缺口 ( $L \ll 2\pi R$ )，其內置有一半徑為  $a$ 、厚度為  $T$ 、電導係數為  $\sigma$  的金屬圓盤。在遠離缺口處，圍繞有  $N$  匝線圈，在時刻  $t = 0$  時通電，使線圈上的電流固定為  $i$ 。設金屬圓盤的介電係數  $\epsilon_0$  與磁導率  $\mu_0$ ，均與真空相同，且所有邊緣磁場可忽略，所有磁力線都均勻分布於圓環內部。

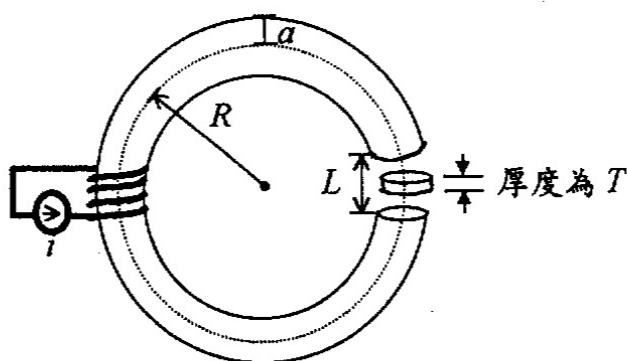


圖 4

依穩態安培定律，若磁場為  $B$ ，介質磁導率為  $\mu$ ，則沿一圓形磁力線  $C$  繞行一圈時， $\frac{B}{\mu}$  對路徑長  $s$  的積分，等於流經  $C$  圓所圍平面的電流總和，即

$$\oint \frac{B}{\mu} ds = \sum i$$

上式右邊的電流符號規則如下述：

若順著某一電流的流動方向往前看時，所見的磁力線為順時鐘方向環繞，則此電流為正，否則為負。

(a) 利用上述安培定律，試求當時刻  $t \rightarrow \infty$  時，圓環內部的磁場  $B_\infty$ （即處於穩定狀態下的磁通量密度）。

(b) 在線圈接通電流後，磁場  $B$  由零開始增加。當磁場的時變率為  $\frac{dB}{dt}$  時，試

求金屬圓盤內所感應產生的電場  $E$  的大小和方向？

(c) 考慮一順著圓環中心線的圓形磁力線，其半徑為  $R$ ，如圖 4 的虛線所示，在時刻  $t > 0$  時，穿過此圓的電流總和為何？

(d) 證明圓環內的磁場  $B$  滿足下列方程式：

$$\frac{dB}{dt} + \frac{B}{\tau} = \frac{B_\infty}{\tau}, \quad t > 0$$

上式中之  $\tau$  為何？

(e) 承(d)題，試求在時刻  $t > 0$  時，磁場  $B$  和  $t$  之間的函數關係？

五、(a) 如圖 5 所示的中空圓柱體，長度為  $\ell$ ，內外半徑分別為  $r_1$  和  $r_2$ ，內外表面分別維持在溫度  $T_1$  和  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ )。若此圓柱體的热導係數為  $\kappa$ ，求單位時間內自內表面傳導至外表面的熱能。

(b) 一般家用電線係直徑為  $2.0 \text{ mm}$  的銅導線，其單位長度的電阻為  $5.2 \Omega \text{ km}^{-1}$ 。電線的外面包有一層厚度為  $1 \text{ mm}$

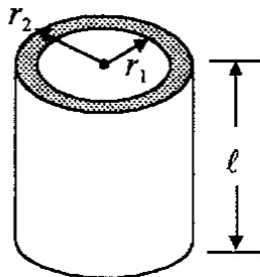


圖 5

的絕緣材料，其熱導係數為  $0.050 \text{ Wm}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ，熱輻射發射率為 0.95。今以 20 A 的電流流經此導線，由於空氣的熱導係數很低，因此電流在導線上所產生的熱可視為完全經由熱輻射散熱。設當時大氣的溫度為  $20^\circ \text{C}$ ，試求當導線達成熱平衡時，(i)絕緣層外表面的溫度；(ii)銅導線的表面溫度。

(註：史特凡-波滋曼常數  $\sigma = 5.6703 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$ )

✓ 六、在一透明的琥珀球體內，嵌有一隻小蟲。小蟲  $P$  的位置和球心  $O$  之間的距離為  $r$ ，如圖 6 所示。已知球的半徑為  $R$ ，琥珀的折射率為  $n$ ，回答下列問題：

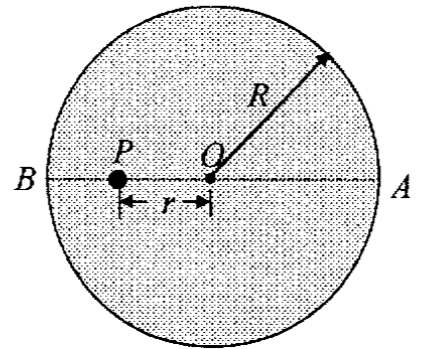


圖 6

(a) 試討論在什麼角度範圍內(對小蟲的張角)觀察該球，才可以看到小蟲？

(b) 若從  $A$  點的右方，沿著直徑( $A \rightarrow B$ )的方向觀察小蟲，則所見到的小蟲位置離球心有多遠？比小蟲的真正位置要深些？還是淺些？

(c) 同(b)題，但改從  $B$  點的左方，沿著直徑( $B \rightarrow A$ )的方向來觀察小蟲。